ALEA 2011 Exercices X.G.Viennot

CIRM, Mars 2011

1. Tableaux alternatifs et tableaux de permutations

Construire une bijection entre les tableaux alternatifs de taille n et les tableaux de permutations de taille *(n+1)*. (conseil: penser au passage Q-tableau complet vers Q-tableau). En déduire l'interprétation (Corteel-Williams) des probabilités stationnaires du PASEP (q,α,β) en termes de tableaux de permutations.

2. Tableaux alternatifs de Catalan

Montrer que la connaissance des cellules rouges (resp. bleues) d'un tableau alternatif de Catalan permet de retrouver ce tableau. Donner une caractérisation de ces cellules rouges d'un tableau alternatif de Catalan en termes de motif interdit (il y a ici une odeur de tableaux de permutations).

3. Fonction de partition du TASEP

D'après une bijection (XGV) entre les tableaux alternatifs de Catalan et les arbres binaires, la fonction de partition Z_n du TASEP est la série génératrice des arbres binaires de taille n selon les paramètres "longueur des branches principales gauche et droite". De plus il est bien connu que la distribution du paramètre "longueur de la branche gauche principale" des arbres binaires est donnée par le "ballot number" $\frac{i}{2n-i}\binom{2n-i}{n}$. Montrer alors bijectivement que Z_n est donnée par: $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2n-i}\binom{2n-i}{n}\frac{\alpha^{-(i+1)}-\beta^{-(i+1)}}{\alpha^{-1}-\beta^{-1}}$

4. TASEP

Donner une bijection entre les tableaux alternatifs de Catalan et les paires de chemins de l'interprétation combinatoire Shapiro-Zeilberger du TASEP. (plus difficile, commencer par un rectangle).

5. Pavages Aztec

Construire une algèbre quadratique Q (ou un automate planaire) permettant de "reconnaître" un pavage Aztec comme un Q-tableau. En déduire que le nombre de pavages Aztec de taille n est égal à $A_n(2)$, dans lequel $A_n(x)$ désigne le polynôme énumérant les matrices à signes alternants de taille n selon le nombre de (-1). (tourner d'abord de 45 degrés le diagramme Aztec et son pavage).

6. ASM et FPL

Pour toute matrice à signe alternants (ASM), on associe une "configuration B.A.BA" en identifiant les entrées *1* et *-1*. Caractériser de telles configurations. Caractériser leur complémentaire. Montrer que cette bijection "passage au complémentaire" est sous une "forme déguisée" la bijection classique entre ASM et FPL ("fully packed loops").

7. Automate planaire

Est-ce qu'un tableau de permutation est reconnaissable par un automate planaire ? En d'autres termes, les tableaux de permutations sont-ils des Q-tableaux ?

8. q-Laguerre (cours II)

Définir la bijection inverse de la correspondance "histoires de Laguerre" -- permutations. En déduire que le paramètre "q-Laguerre" défini sur les "histoires de Laguerre" est en fait le nombre de "motifs 31-2" sur la permutation correspondante, c'est-à-dire les triplets $i < j = (i+1) < k$ tels que $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$.

9. q-Hermite et $UD = qDU + I$ (cours I et II)

Donner une bijection entre les "placements de tours" sur un diagramme de Ferrers et les involutions dont les points fixes sont colorés en deux couleurs. (penser aux "histoires"). Interpréter, en terme d'involution sans point fixe, le terme constant (qui est un polynôme en q) dans le "normal ordering" d'un mot w de l'algèbre quadratique définie par $UD = qDU + I$. (idée: définir le paramètre nombre de "croisement").

10. Algorithme "échange-fusion" (cours II)

Construire la bijection inverse de l'algorihme "échange-fusion" associant un tableau alternatif à une permutation. (idée: dégager des arbres dans le dessin formé des fils rouges et bleus avec leurs croisements).