

Combinatorics and Physics

Chapter 5c

Combinatorics for the PASEP

(the bijection alternative tableaux — permutations)

IIT-Madras
23 February 2015

Xavier Viennot
CNRS, LaBRI, Bordeaux

The "exchange-fusion" algorithm

Def- Permutation $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$

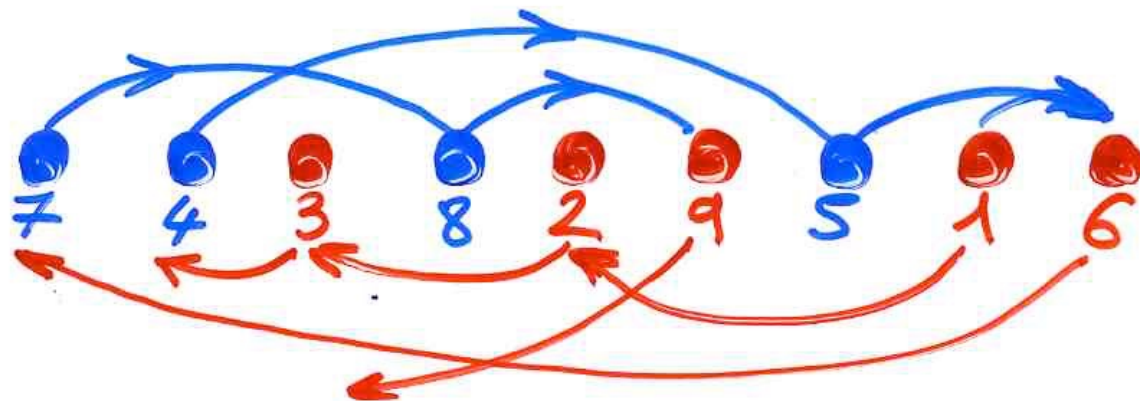
$x = \sigma(i)$, $1 \leq x < n$

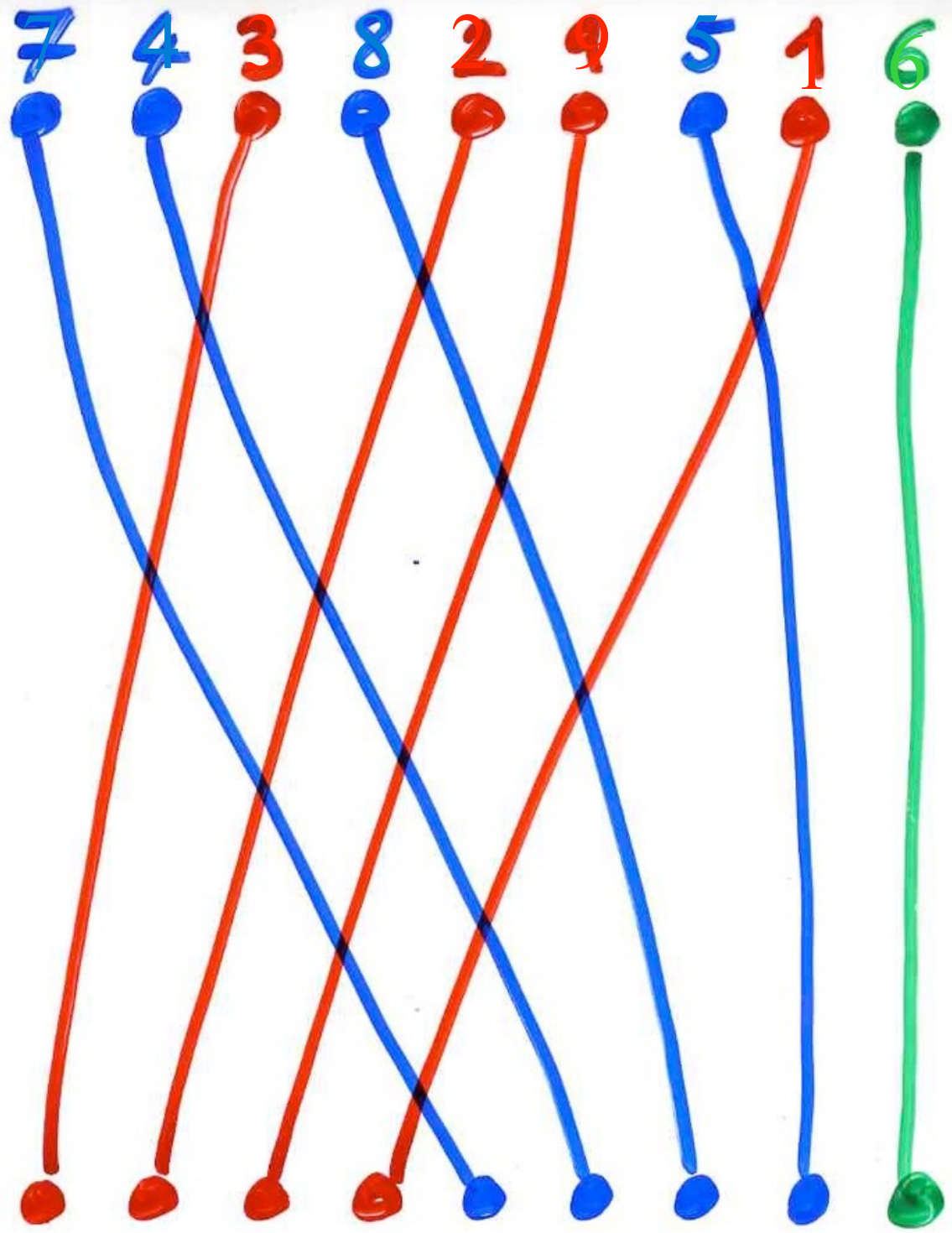
(valeur) x $\begin{cases} \text{avancee} \\ \text{recul} \end{cases}$ $x+1 = \sigma(j)$, $\begin{cases} i < j \\ j < i \end{cases}$

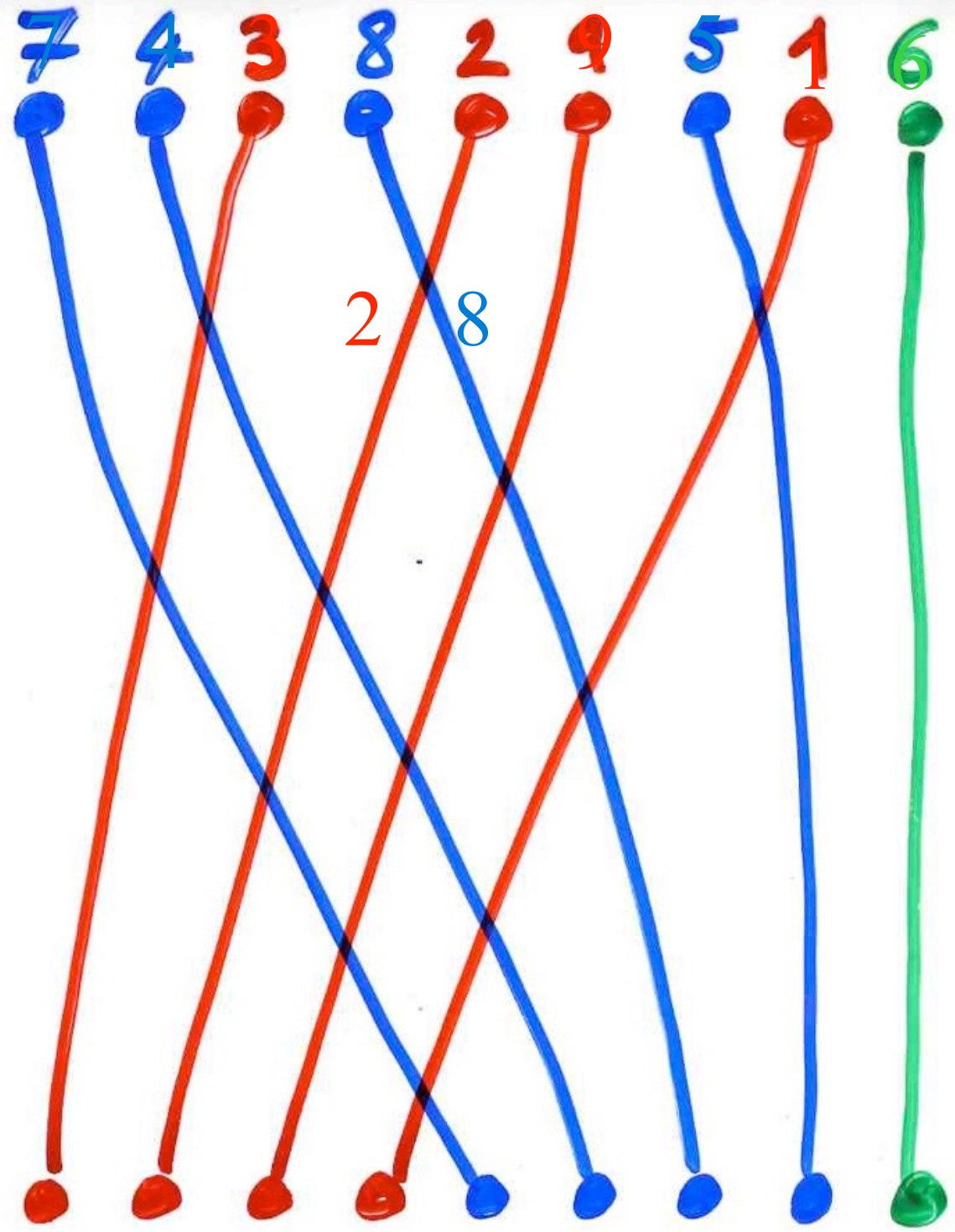
• convention $x=n$ est un recul

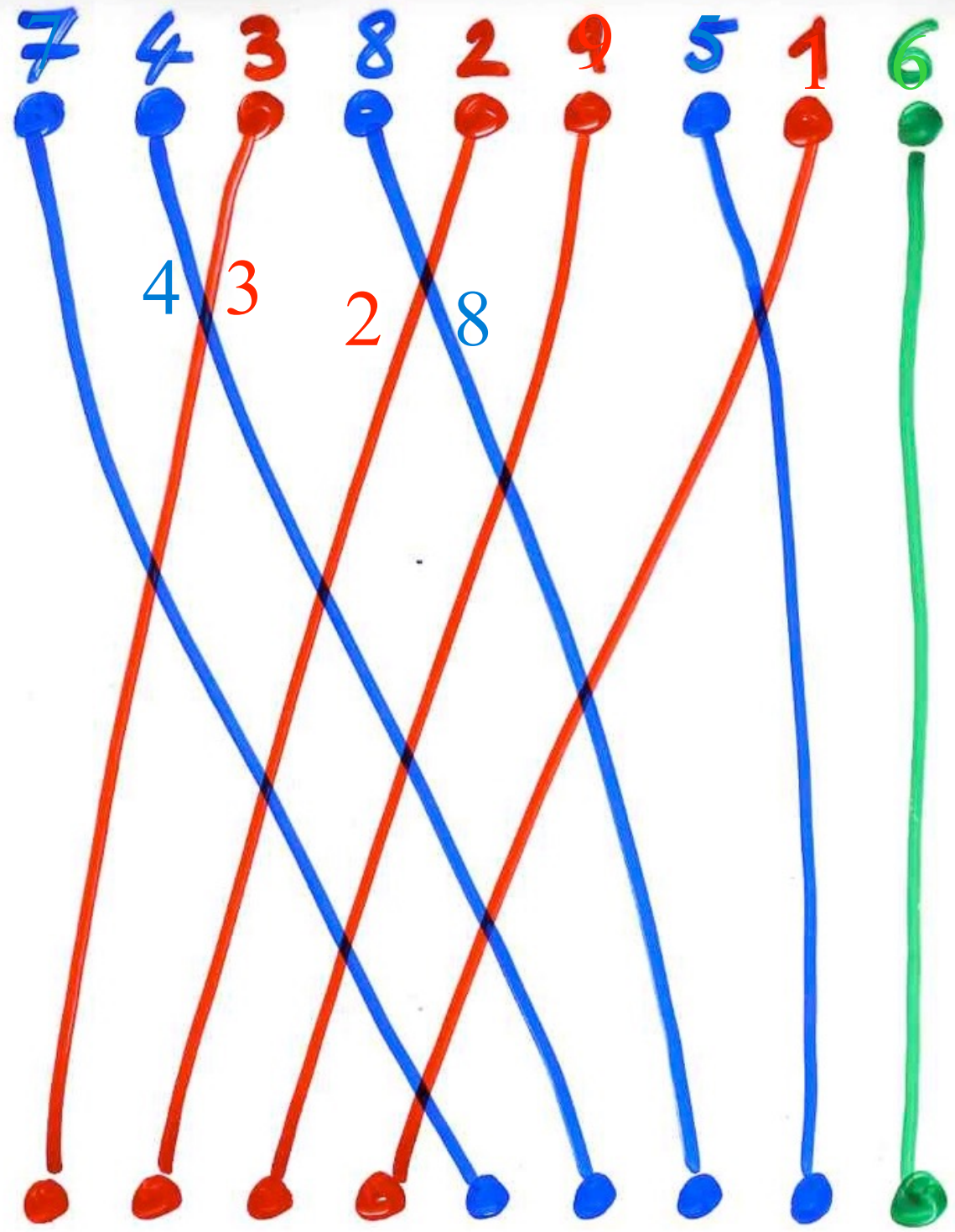


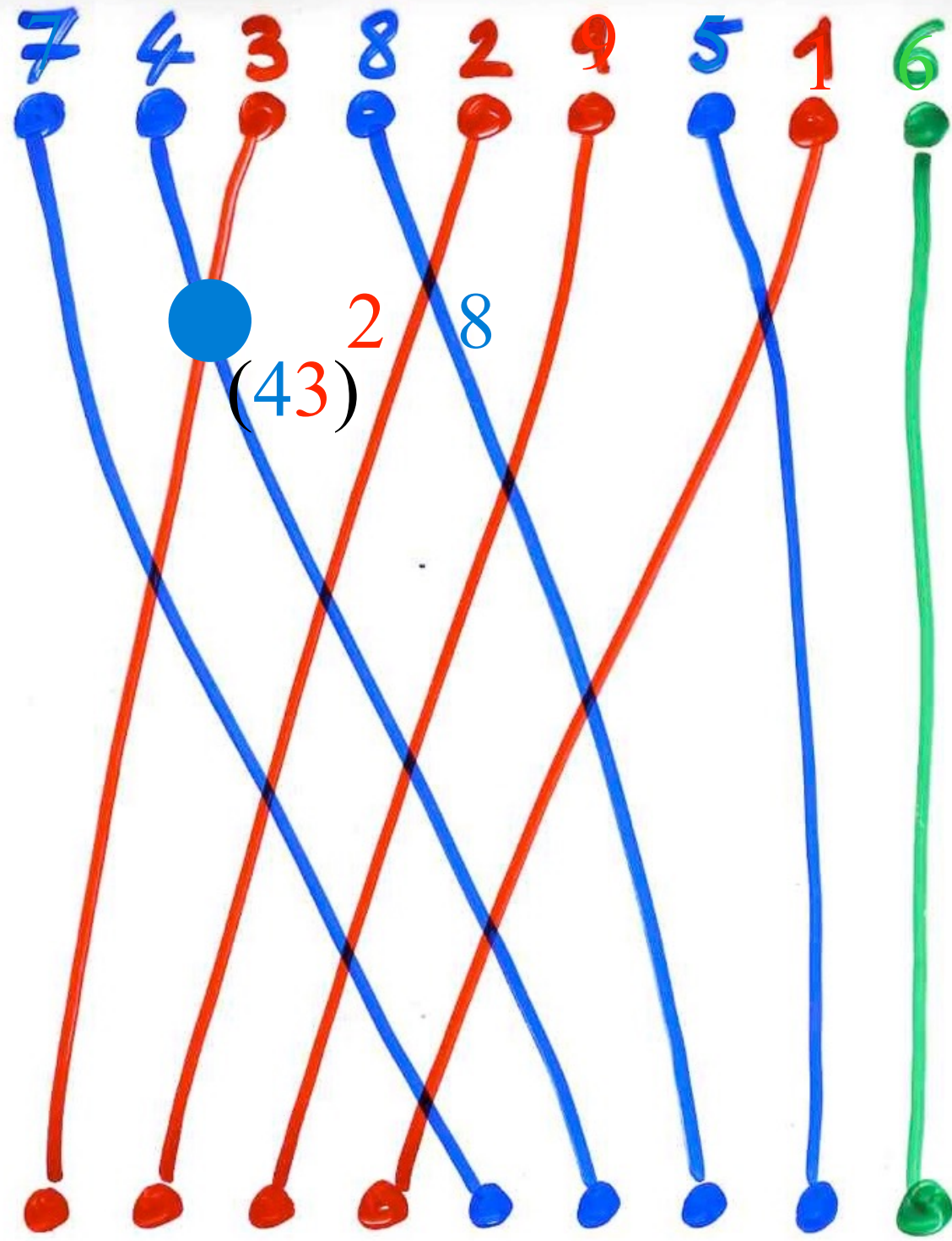
$\sigma = 7 \ 4 \ 3 \ 8 \ 2 \ 9 \ 5 \ 1 \ 6$

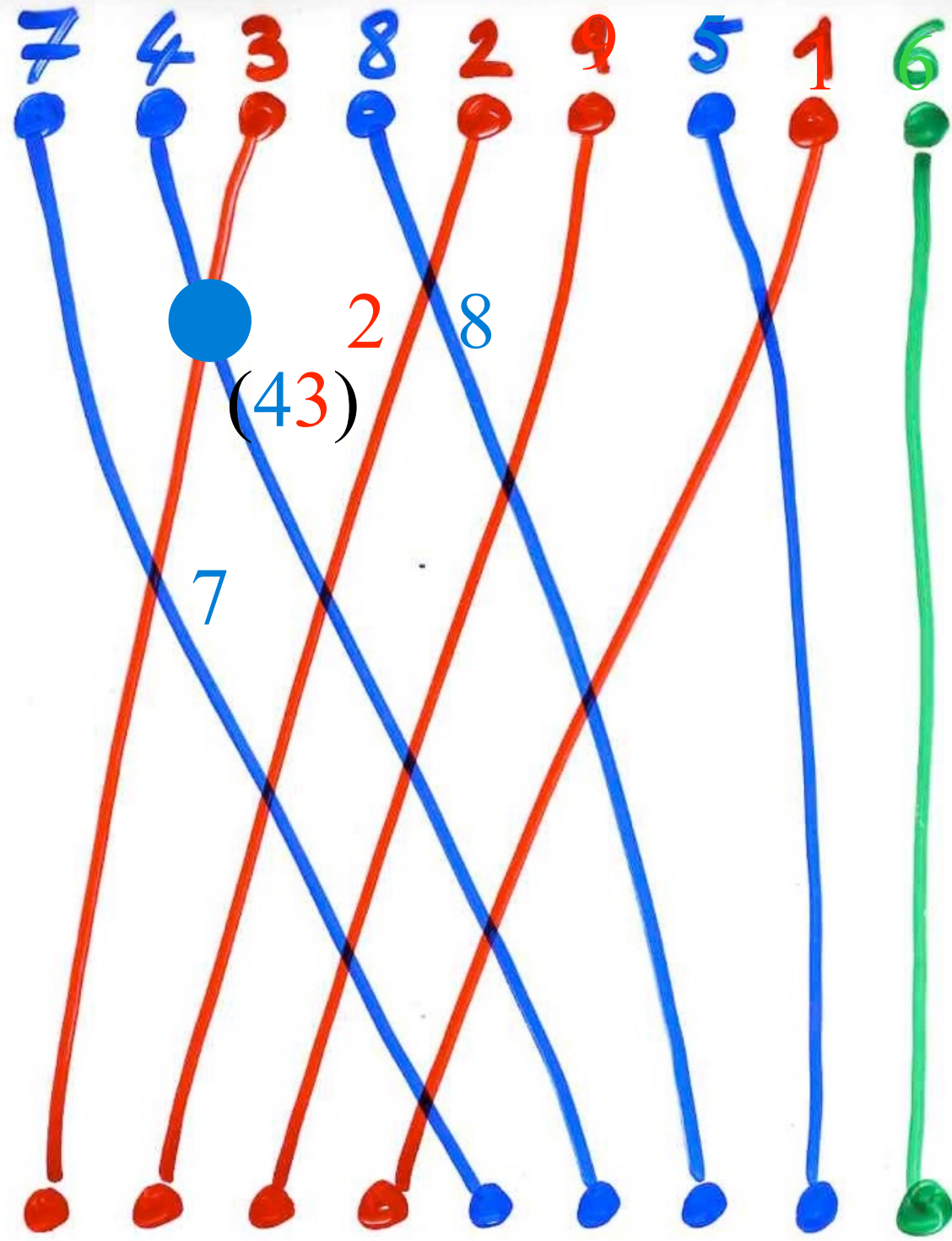


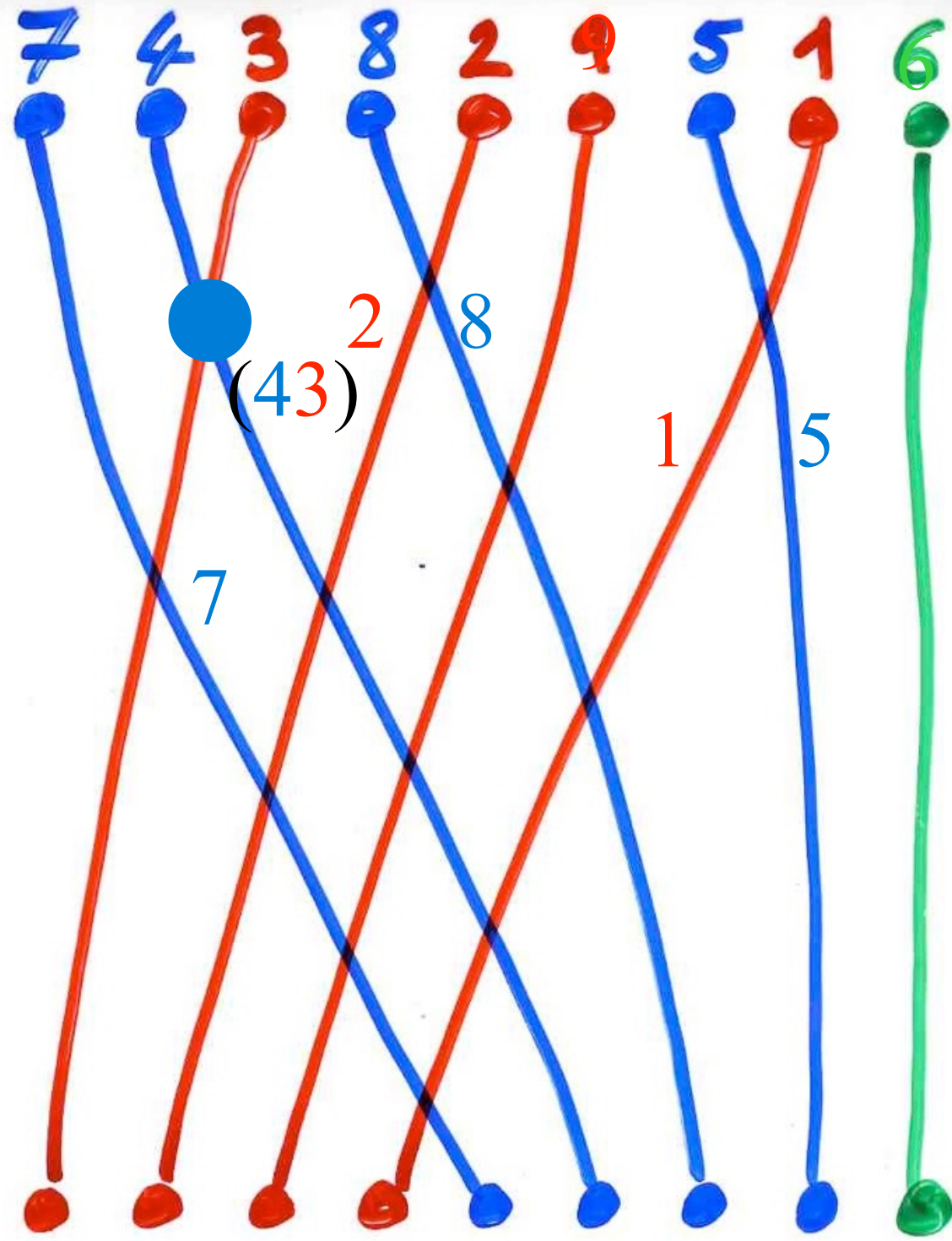


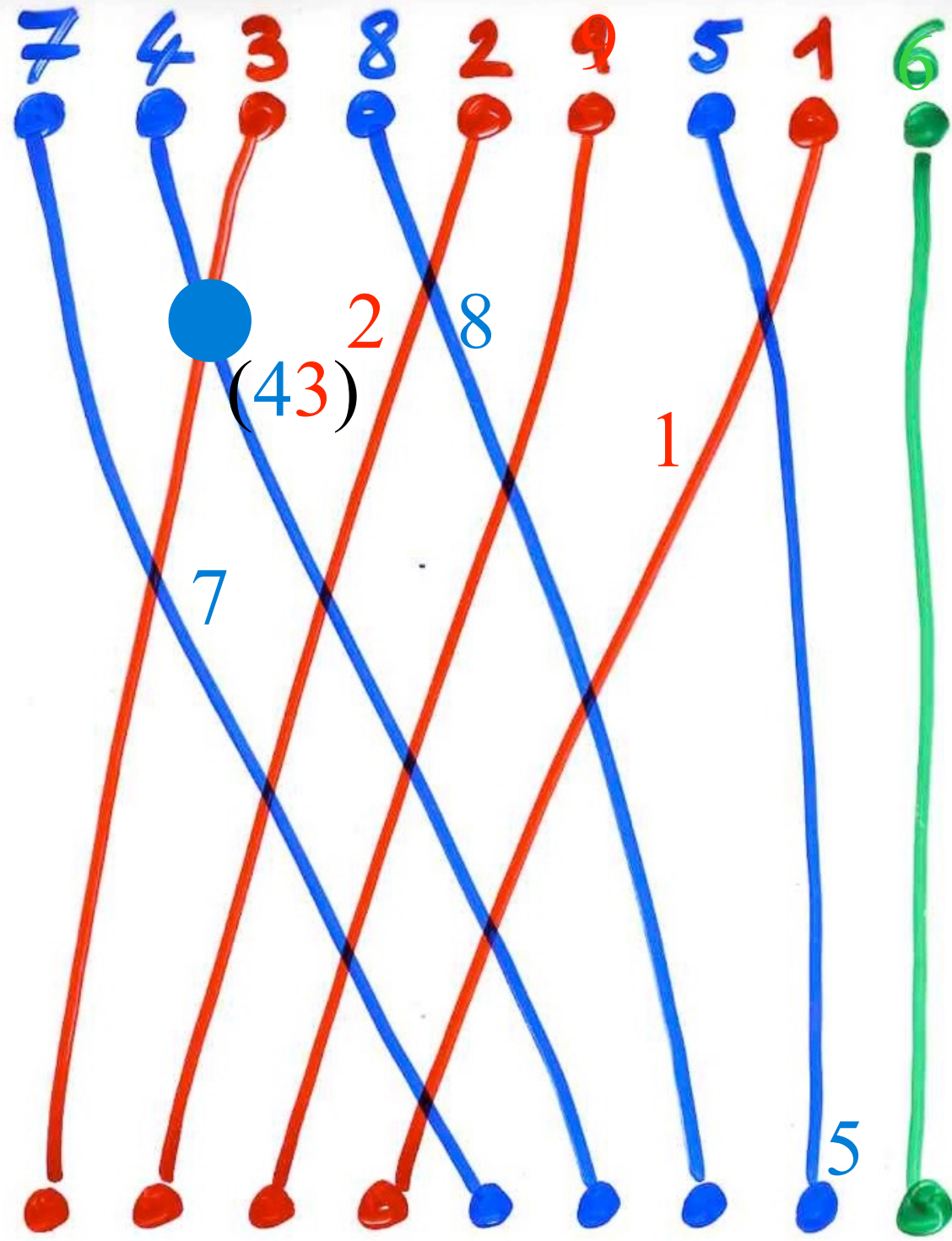


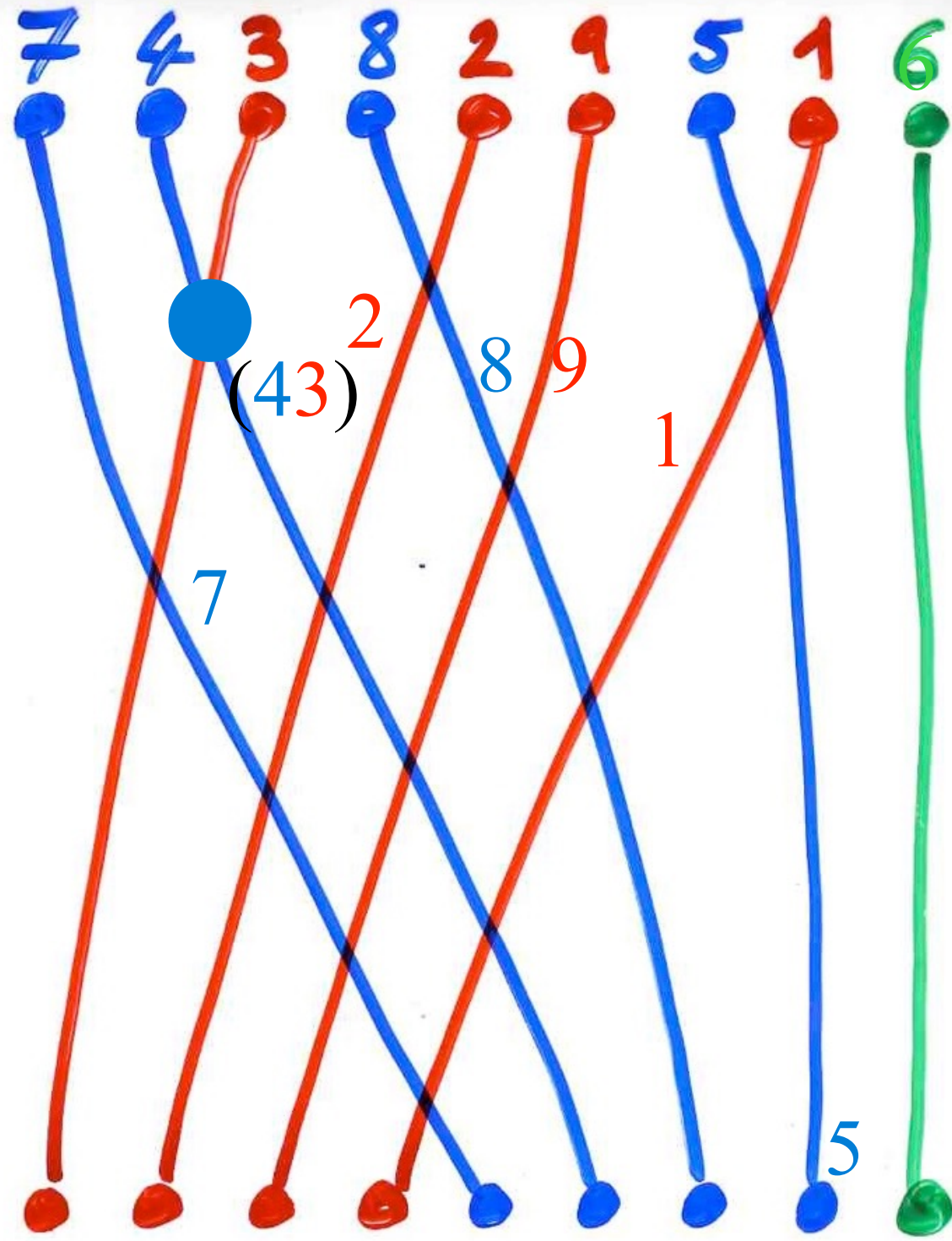


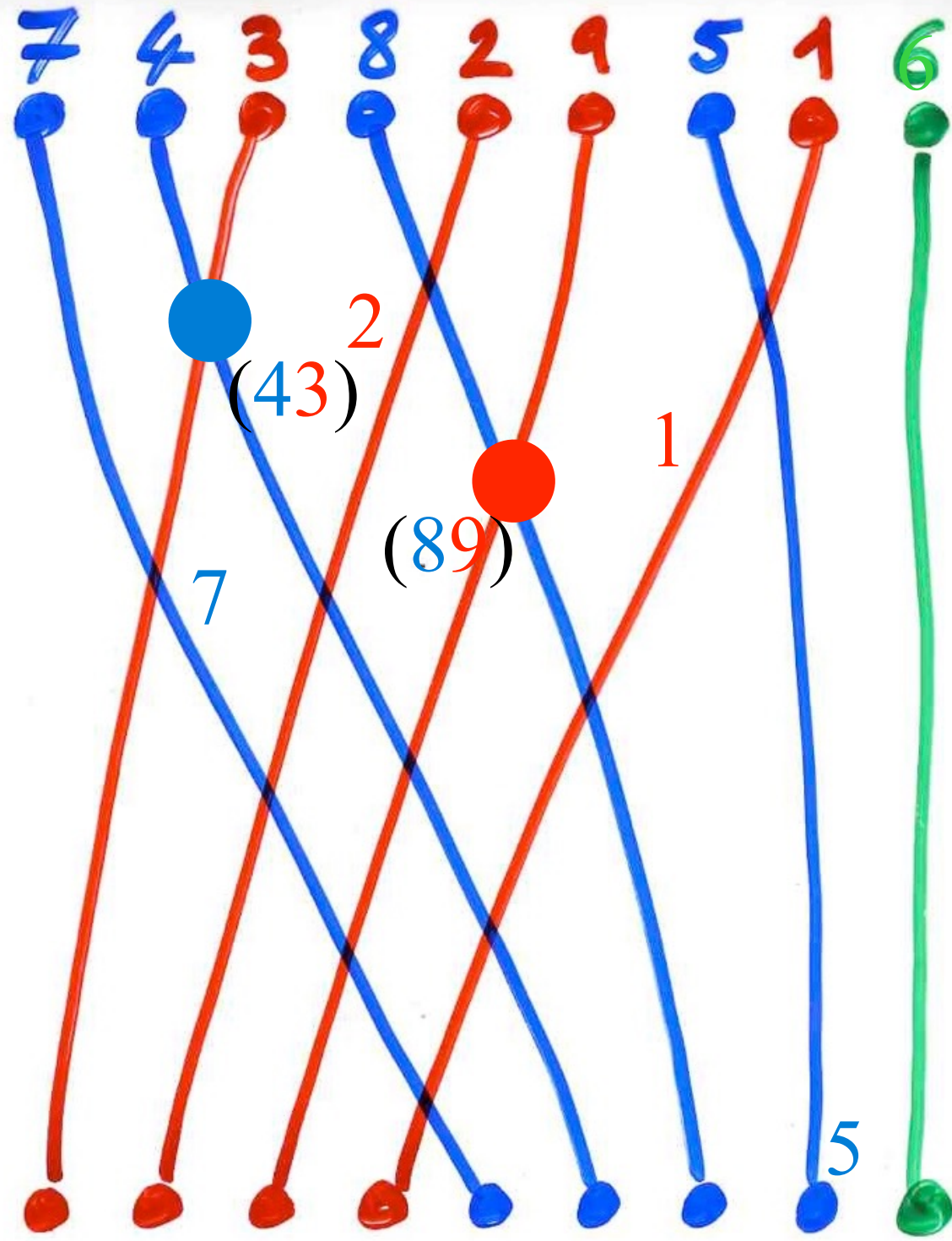


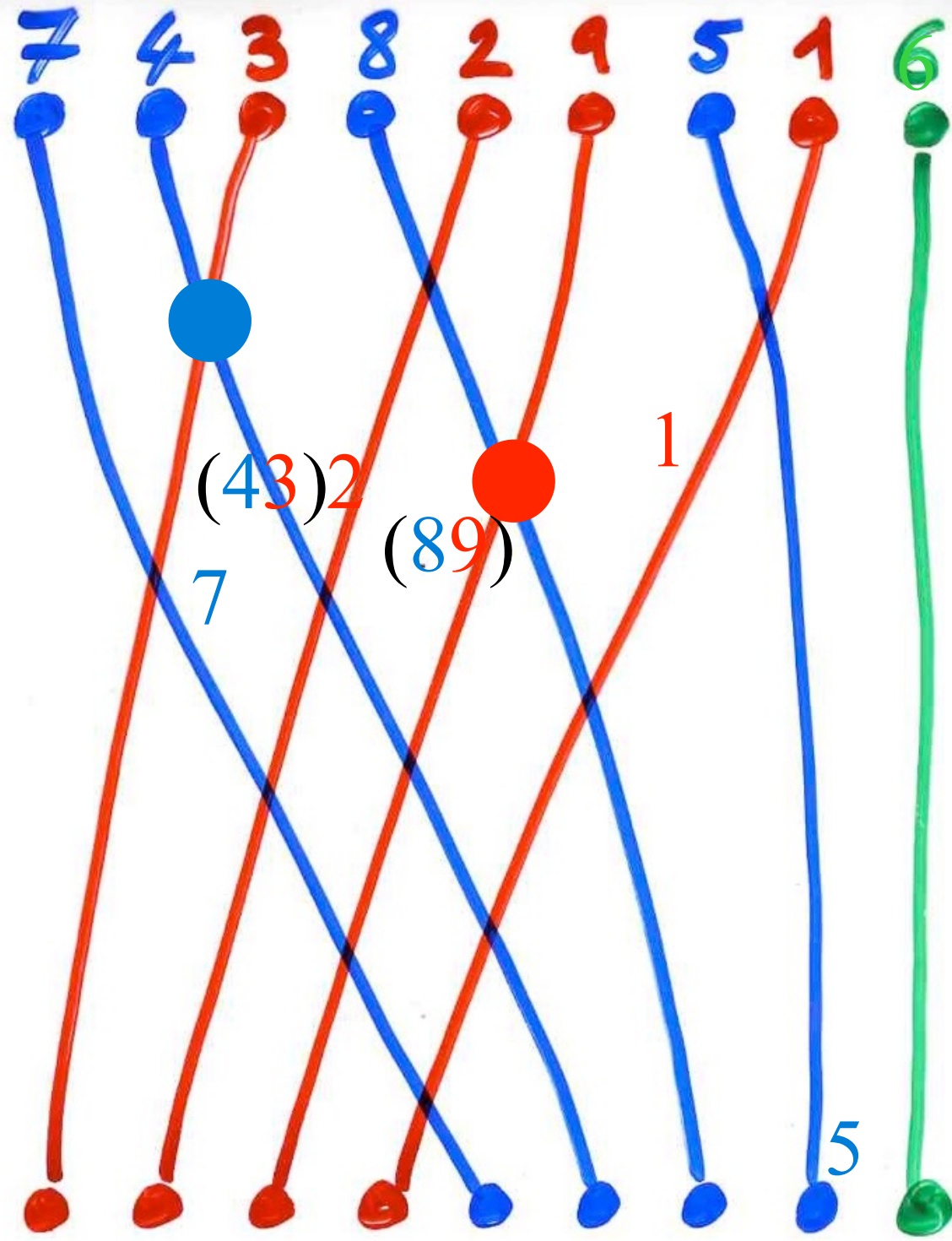


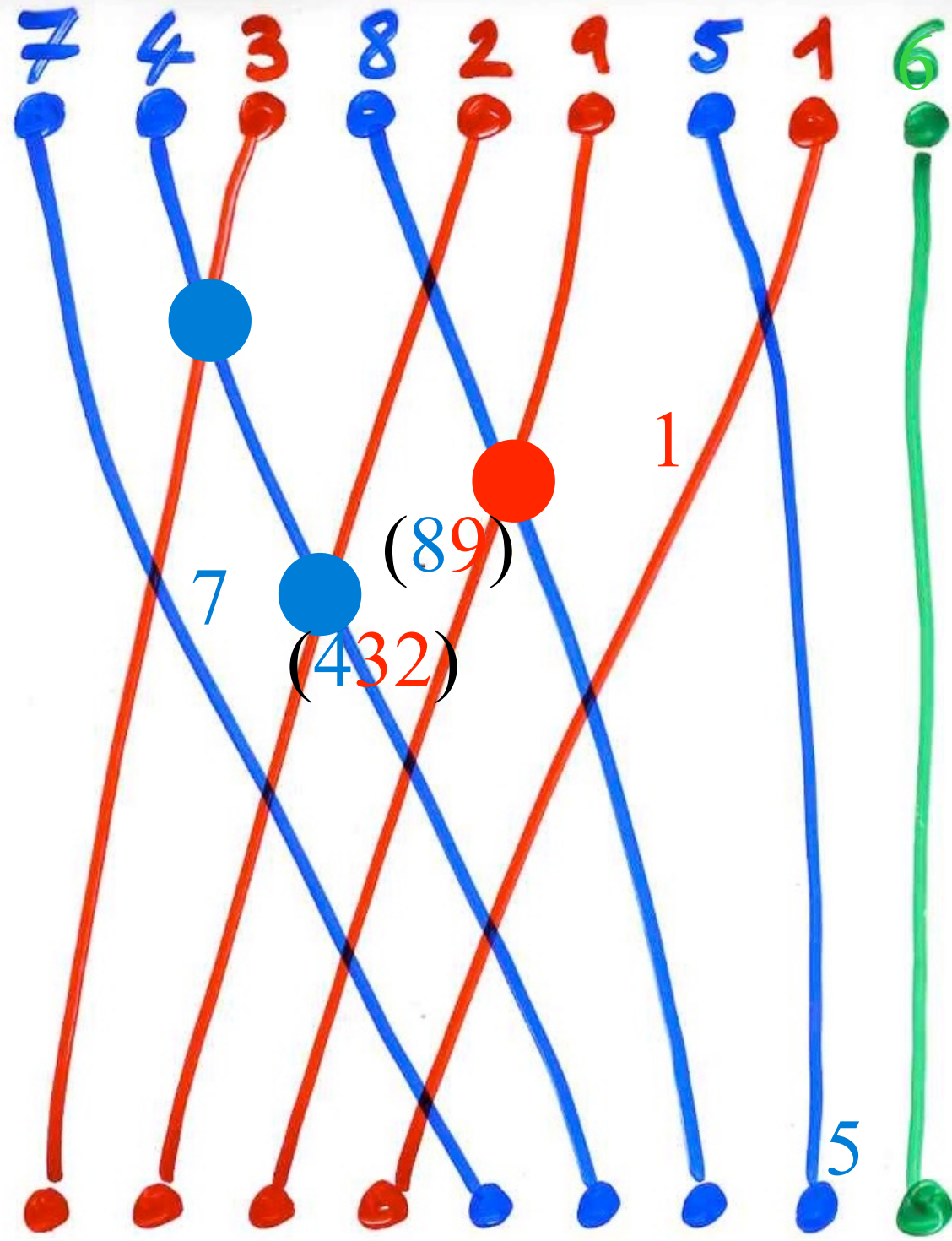


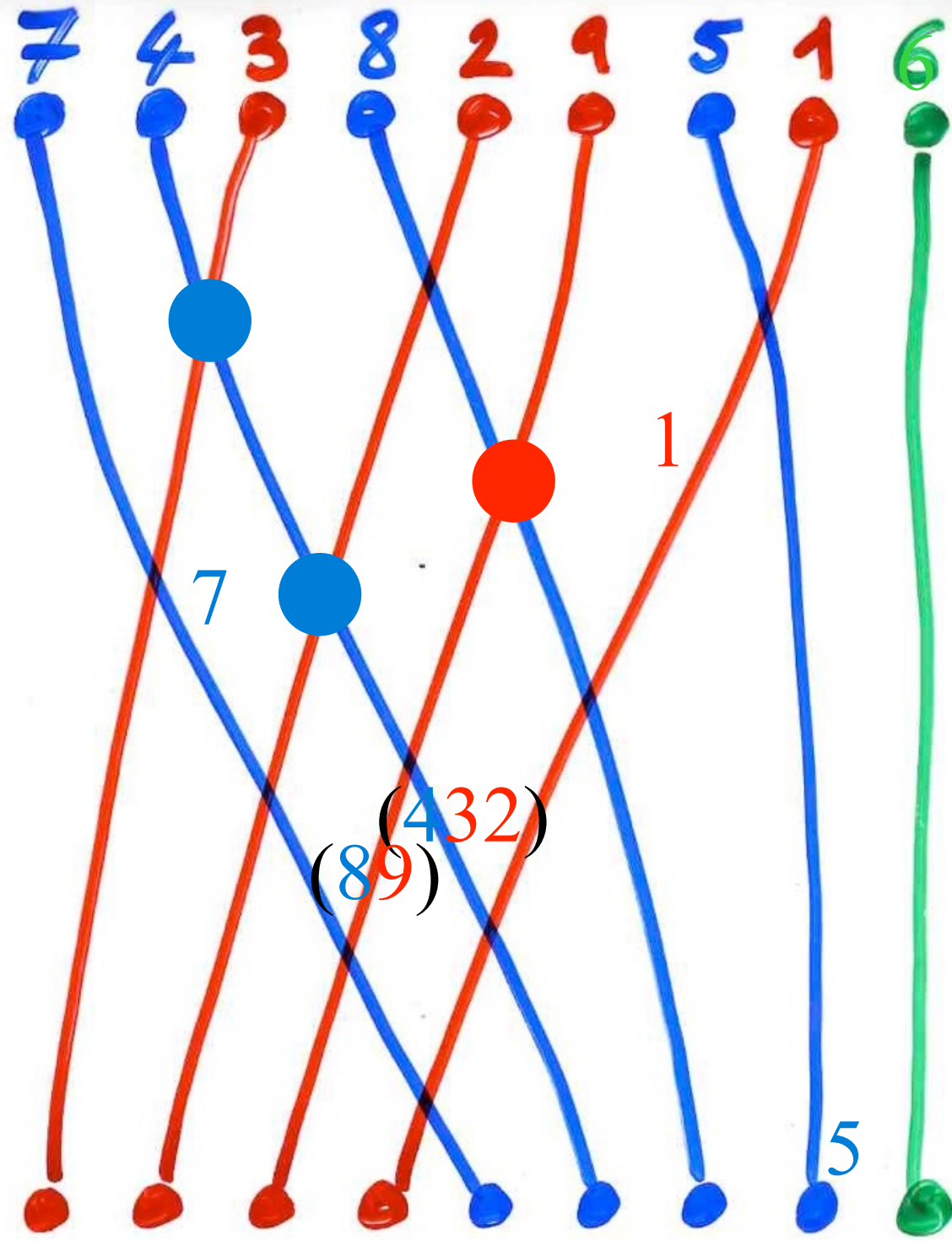


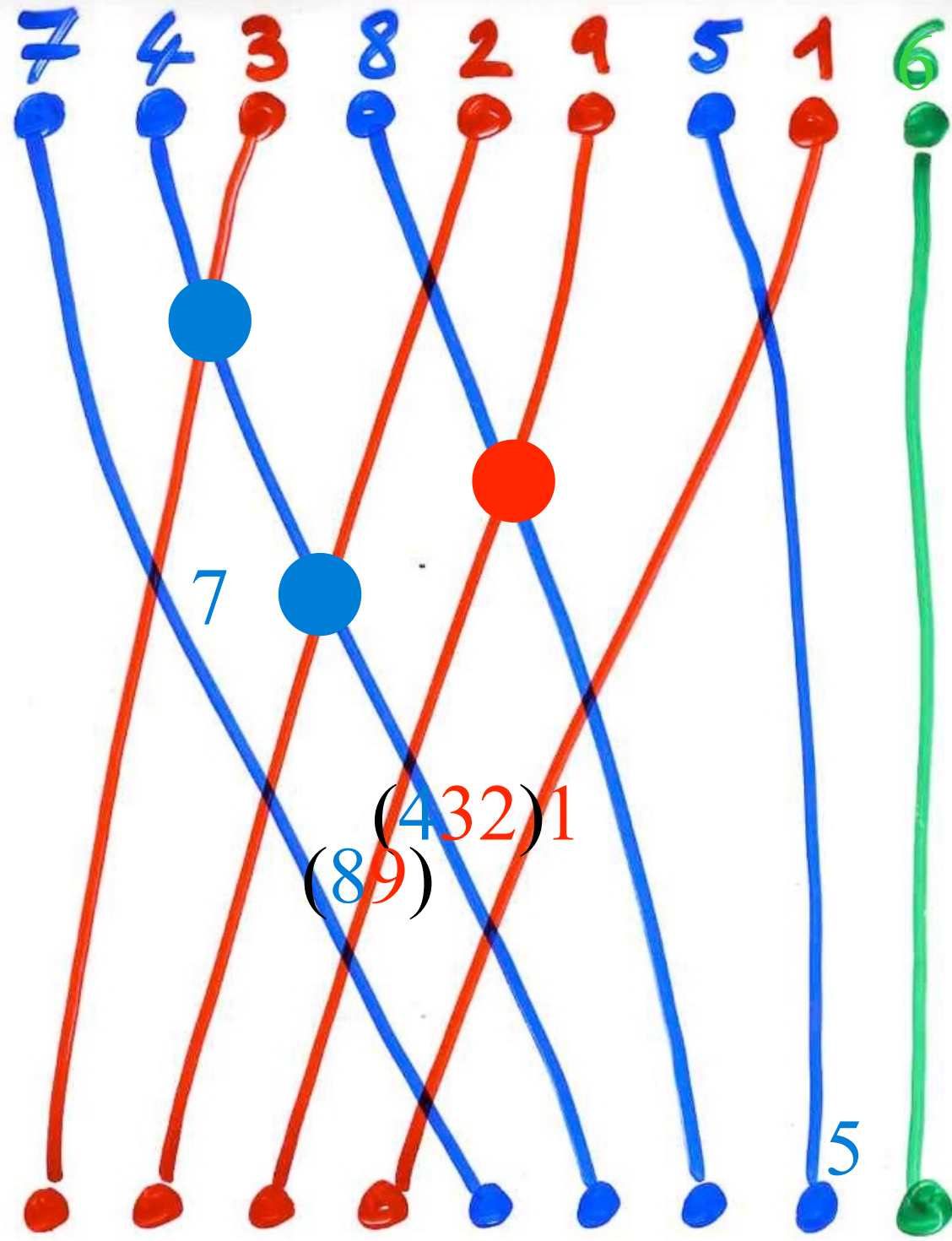


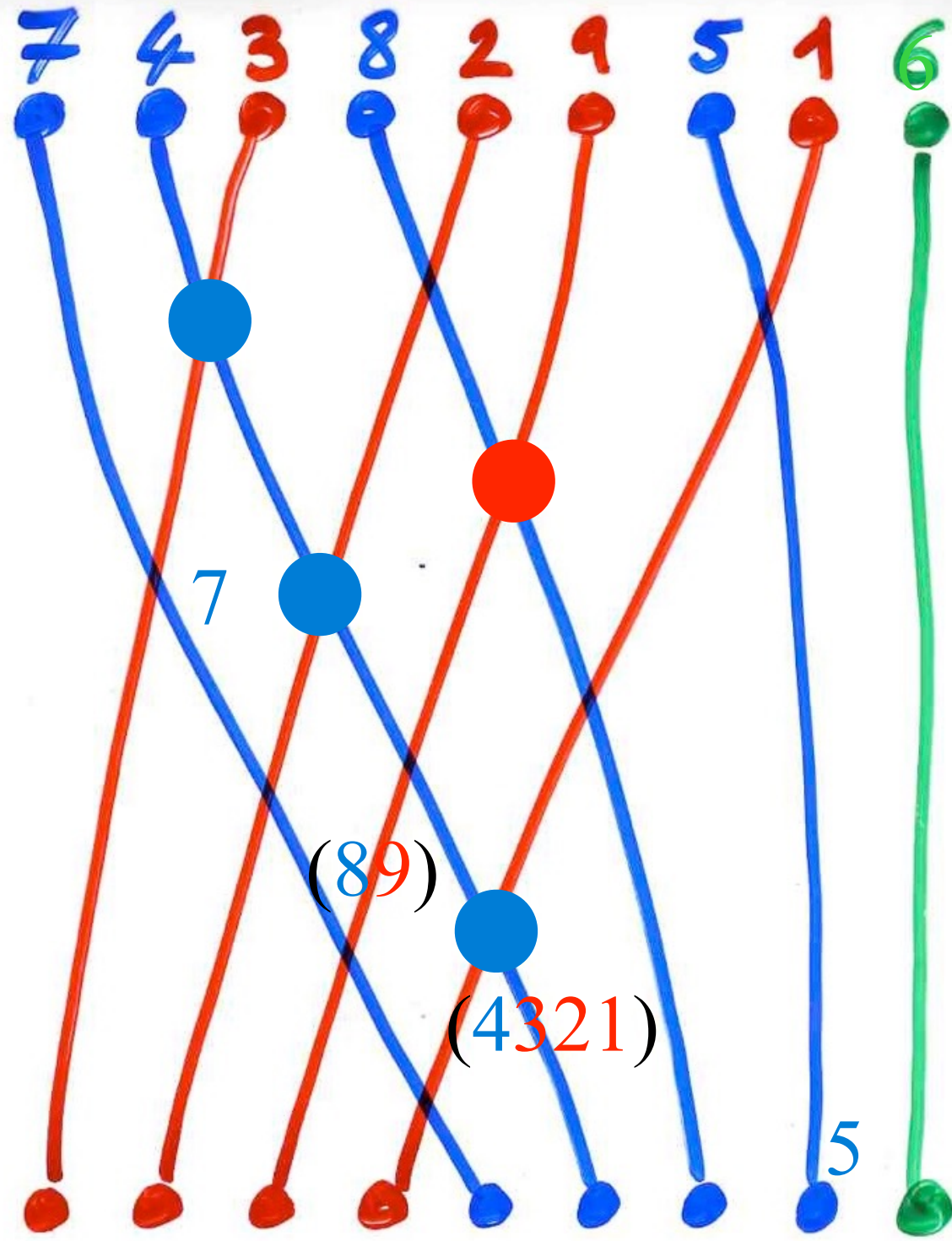


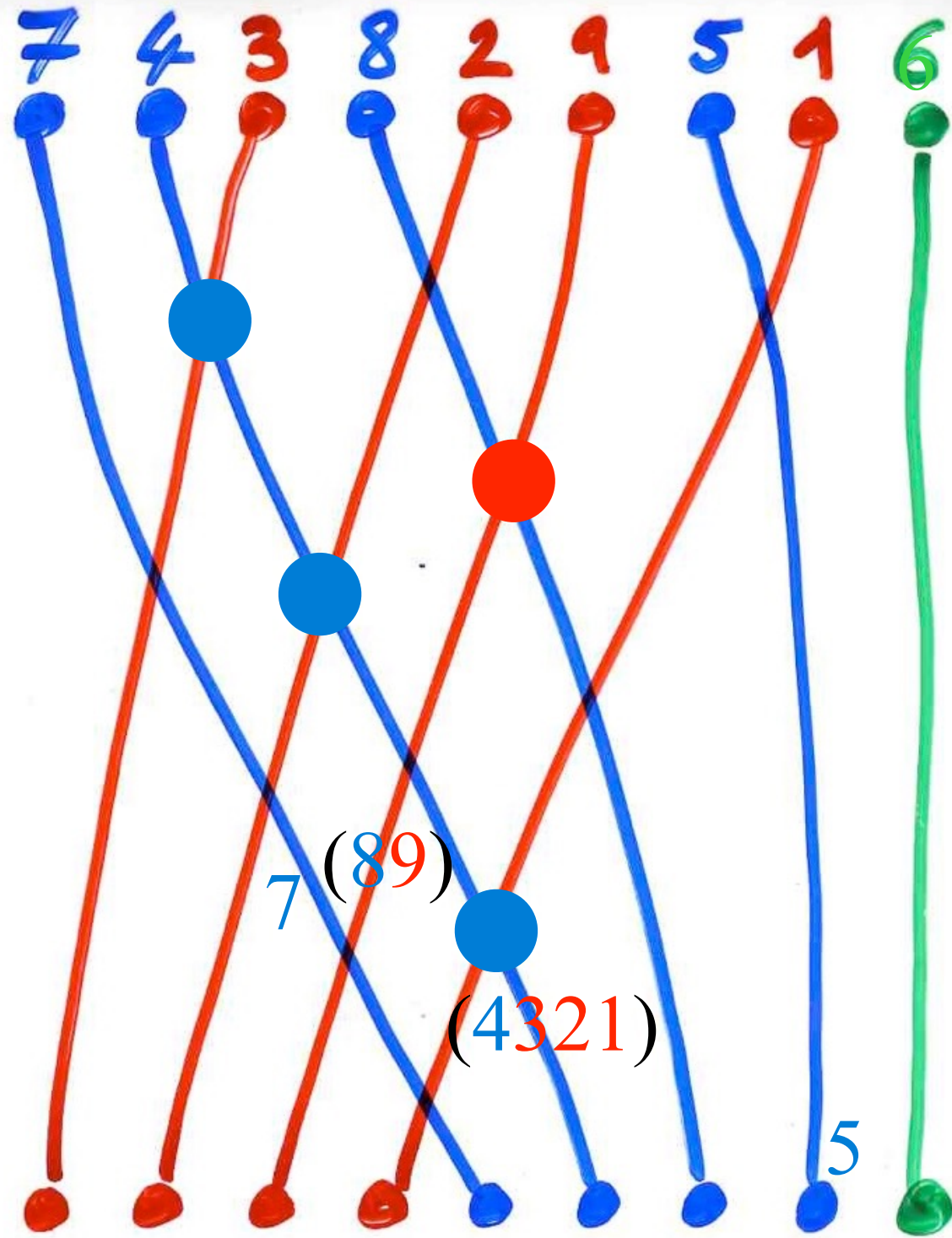


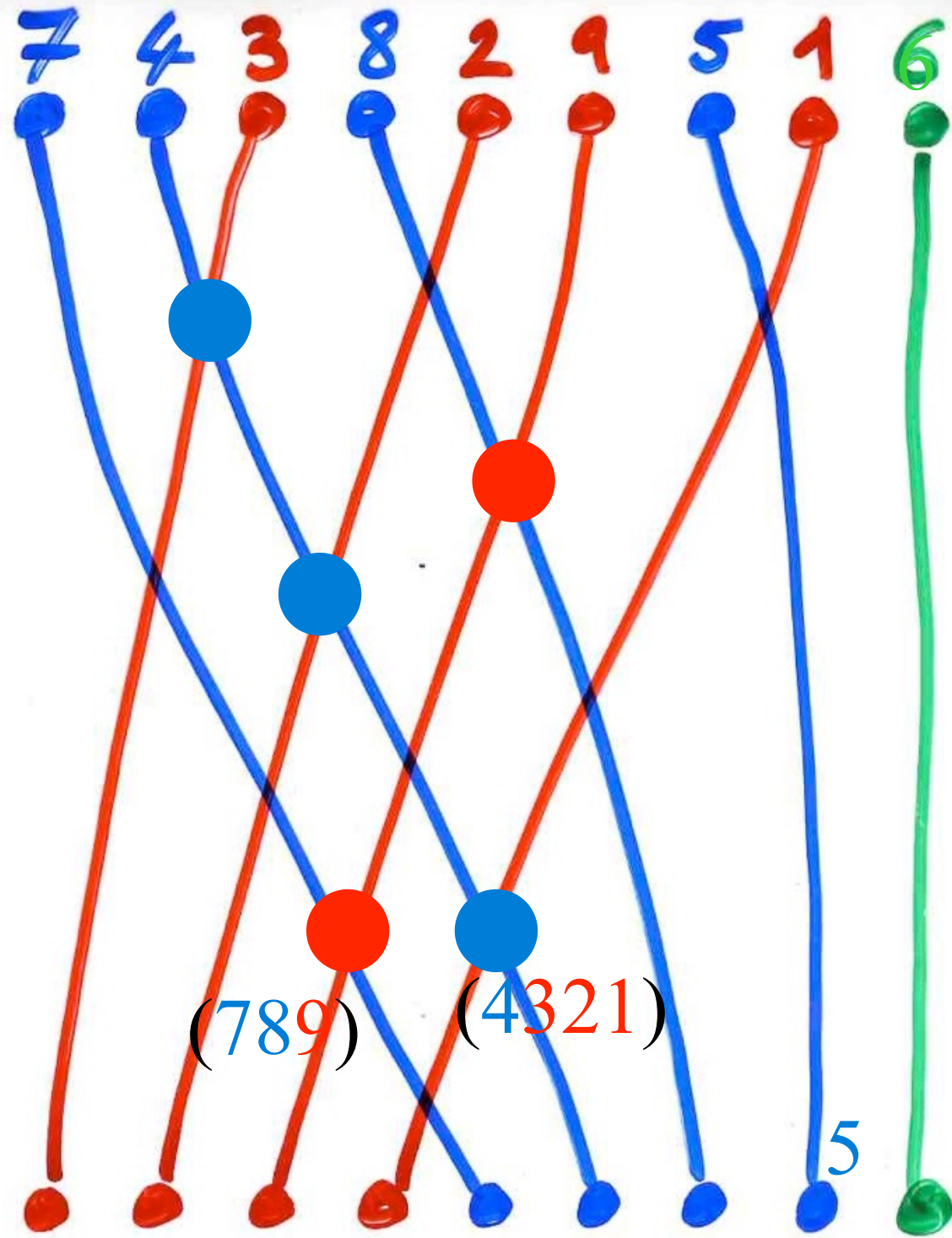




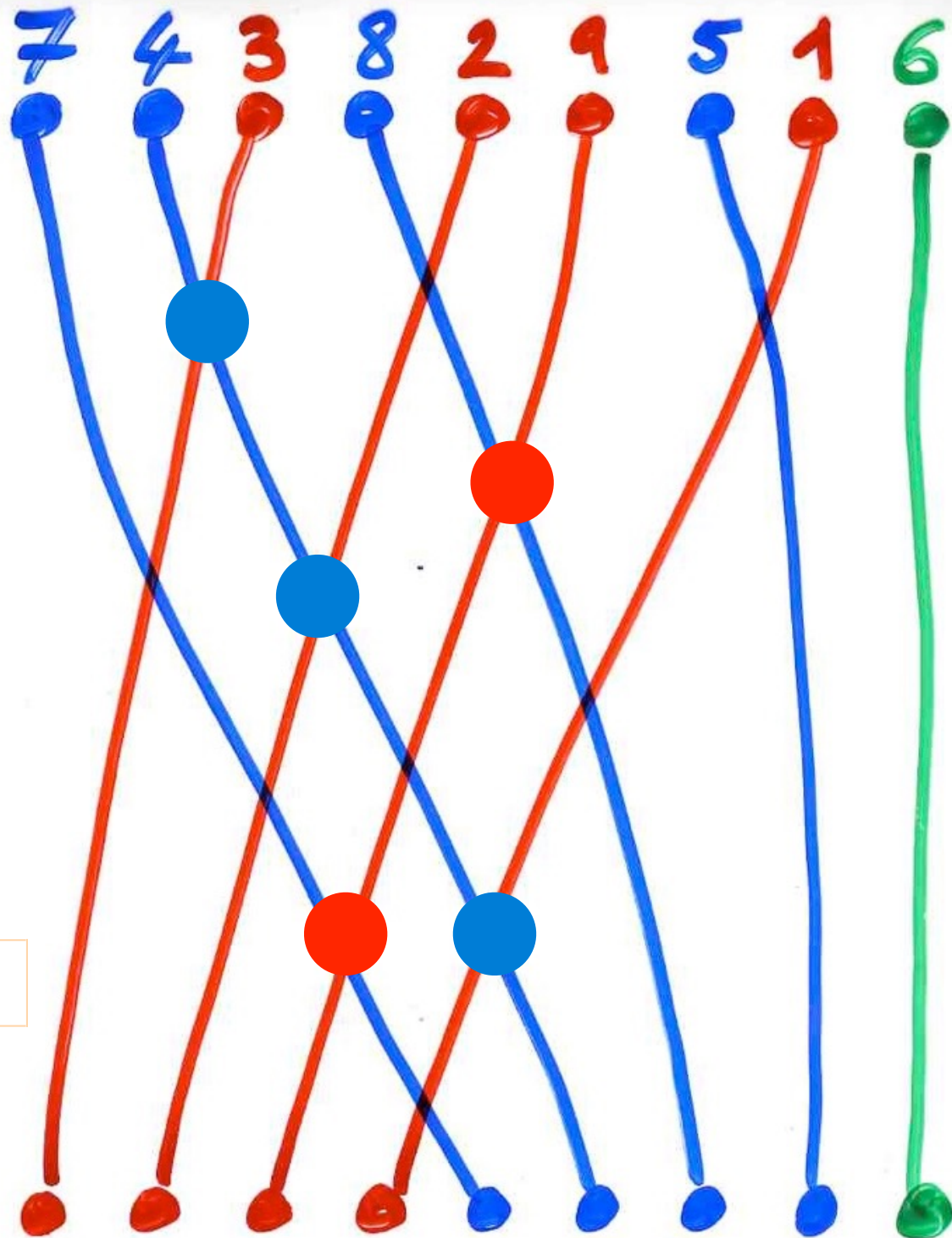
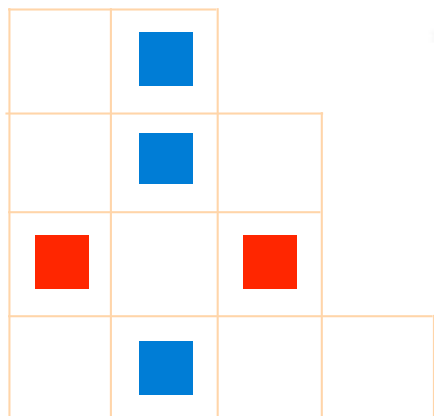








“exchange-
fusion”
algorithm



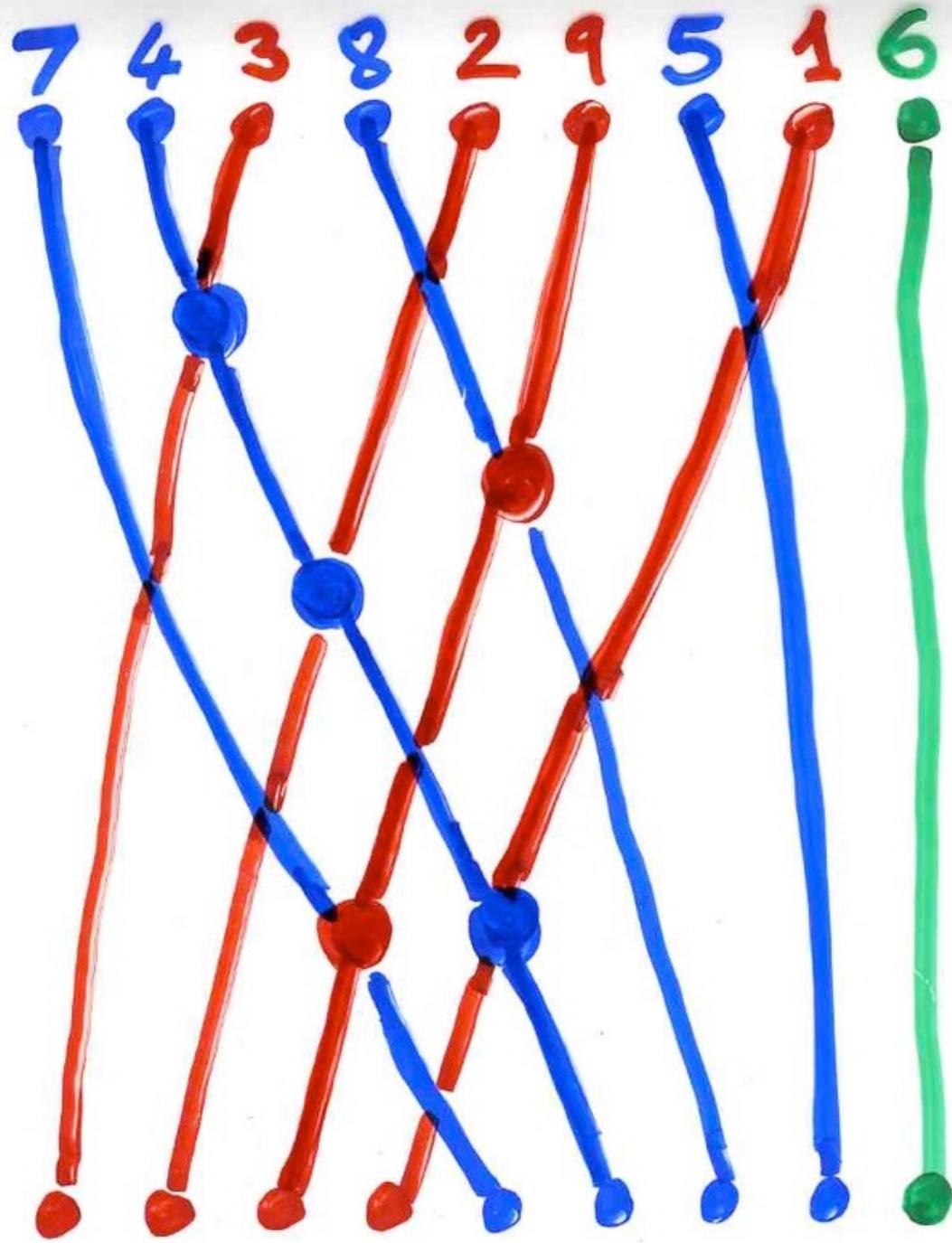
(789)

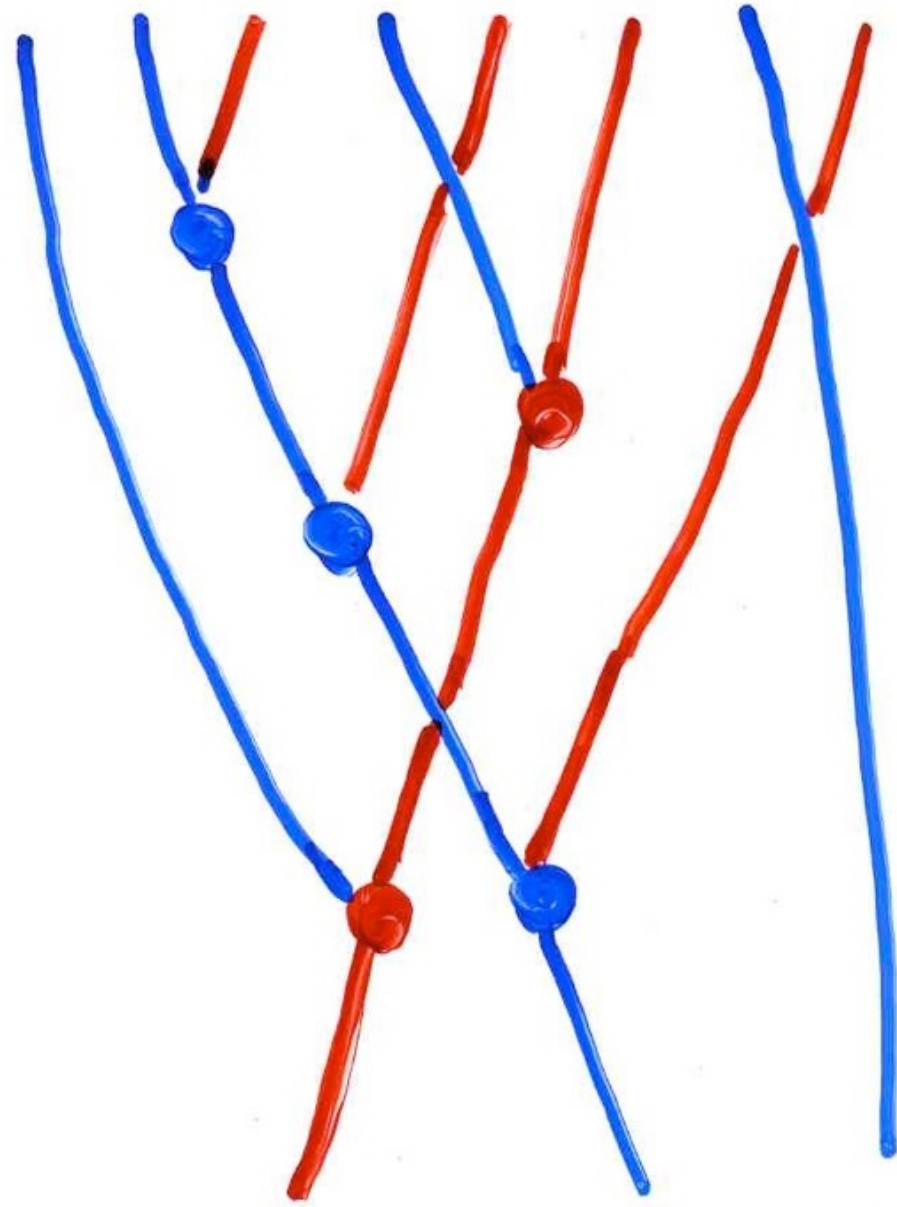
(4321)

5

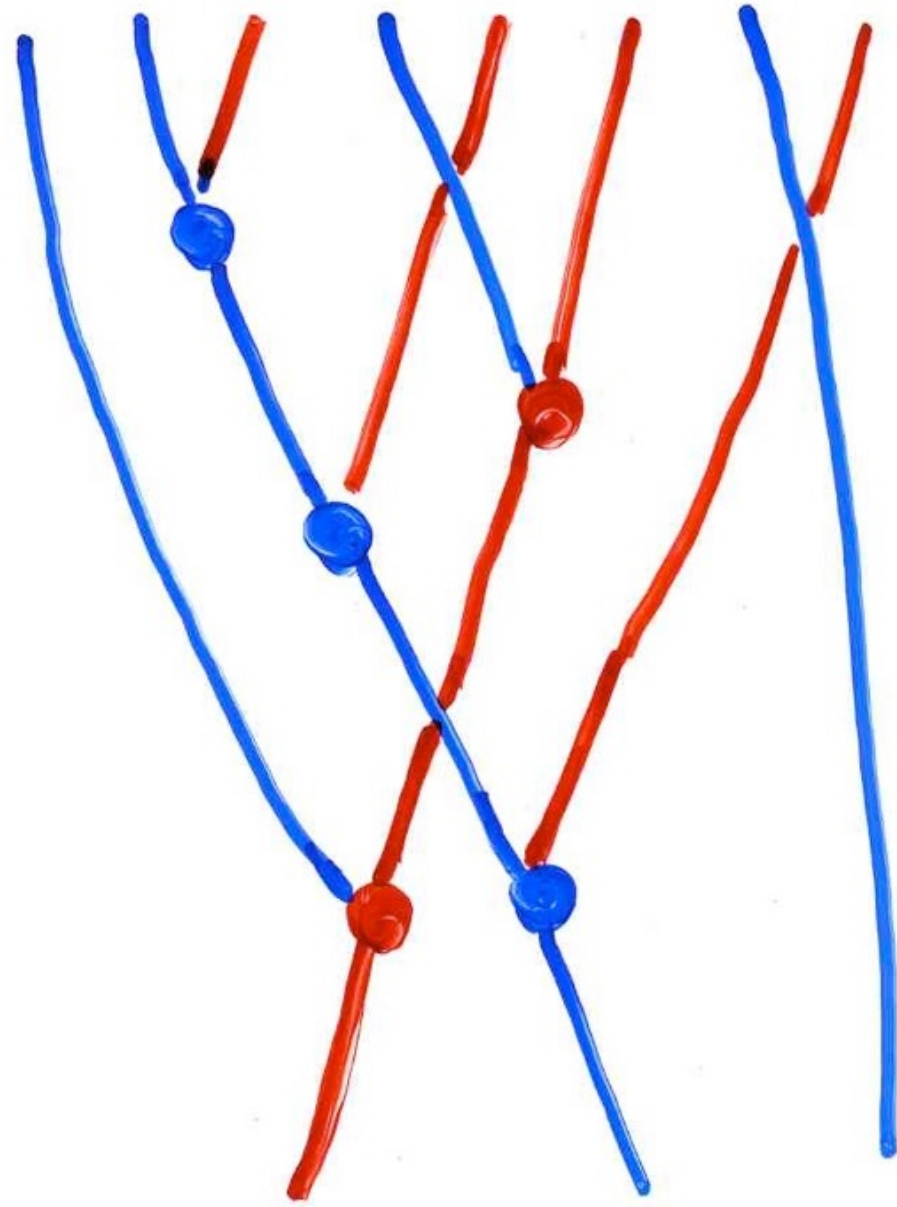
6

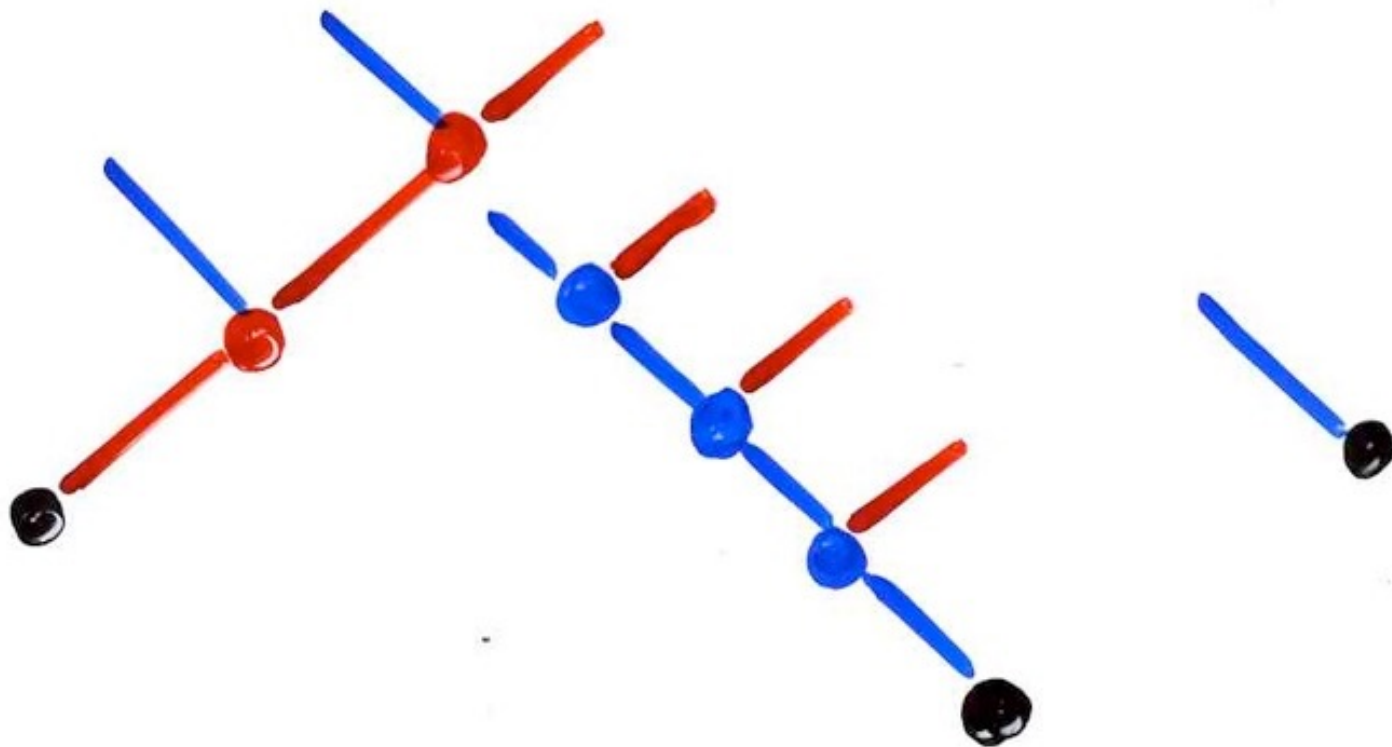
The inverse
“exchange-
fusion”
algorithm

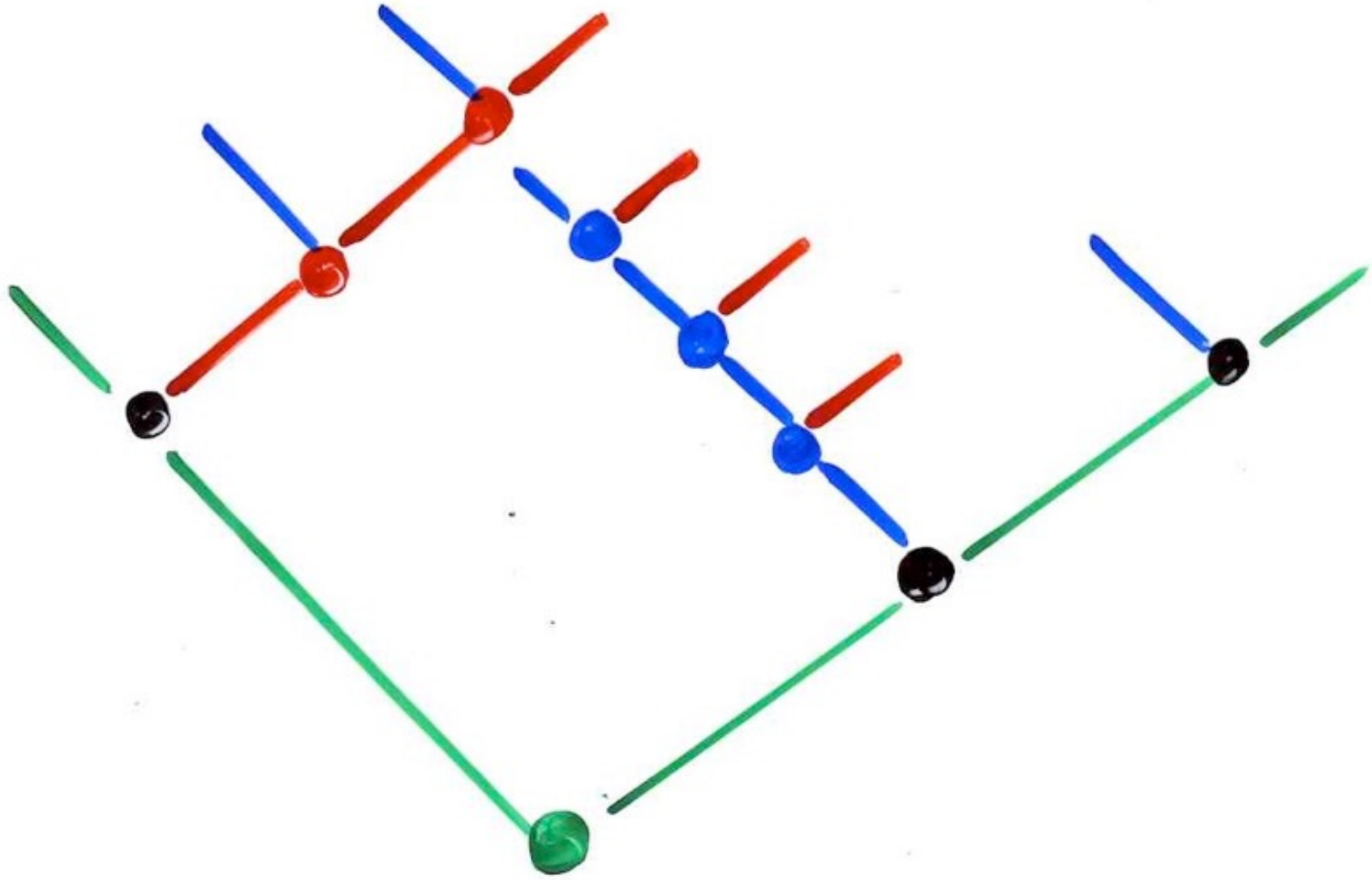


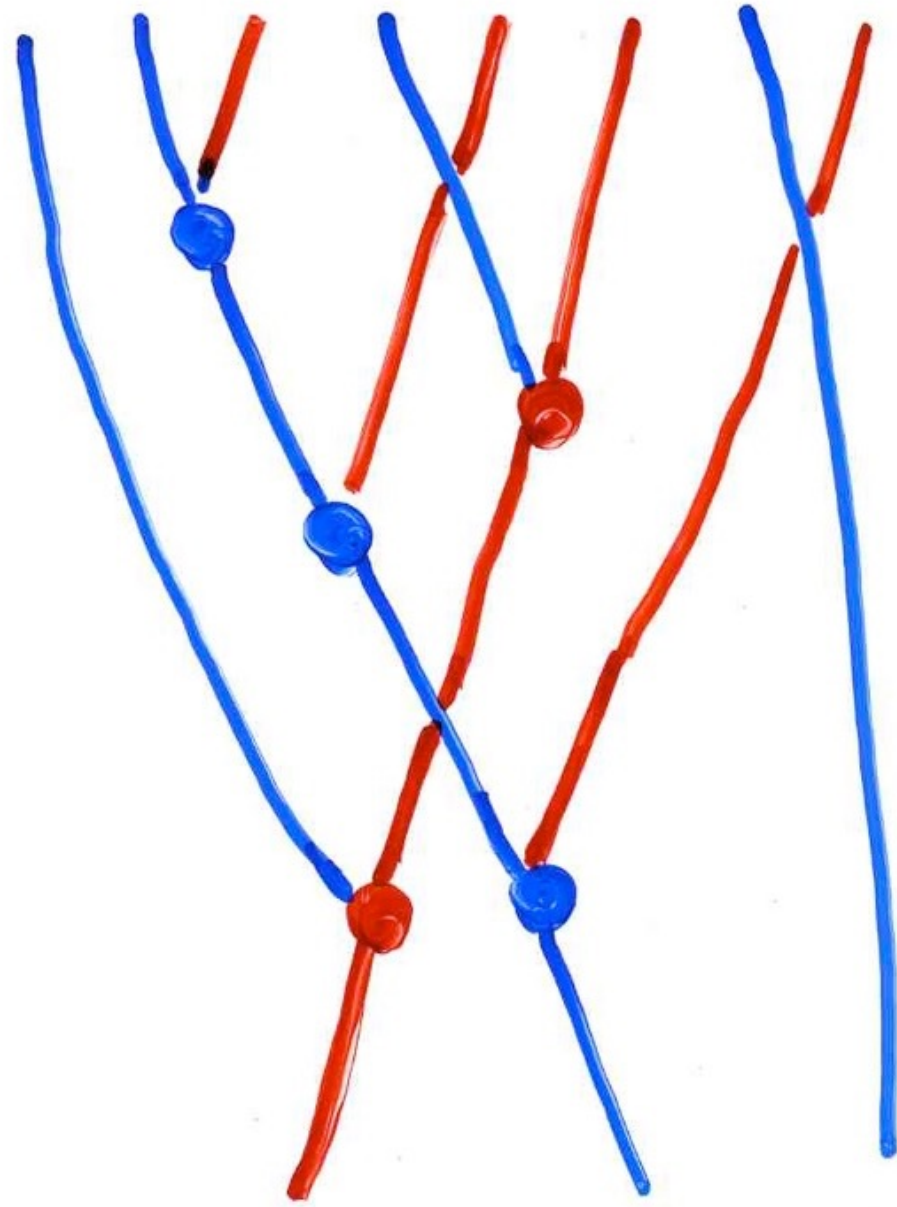


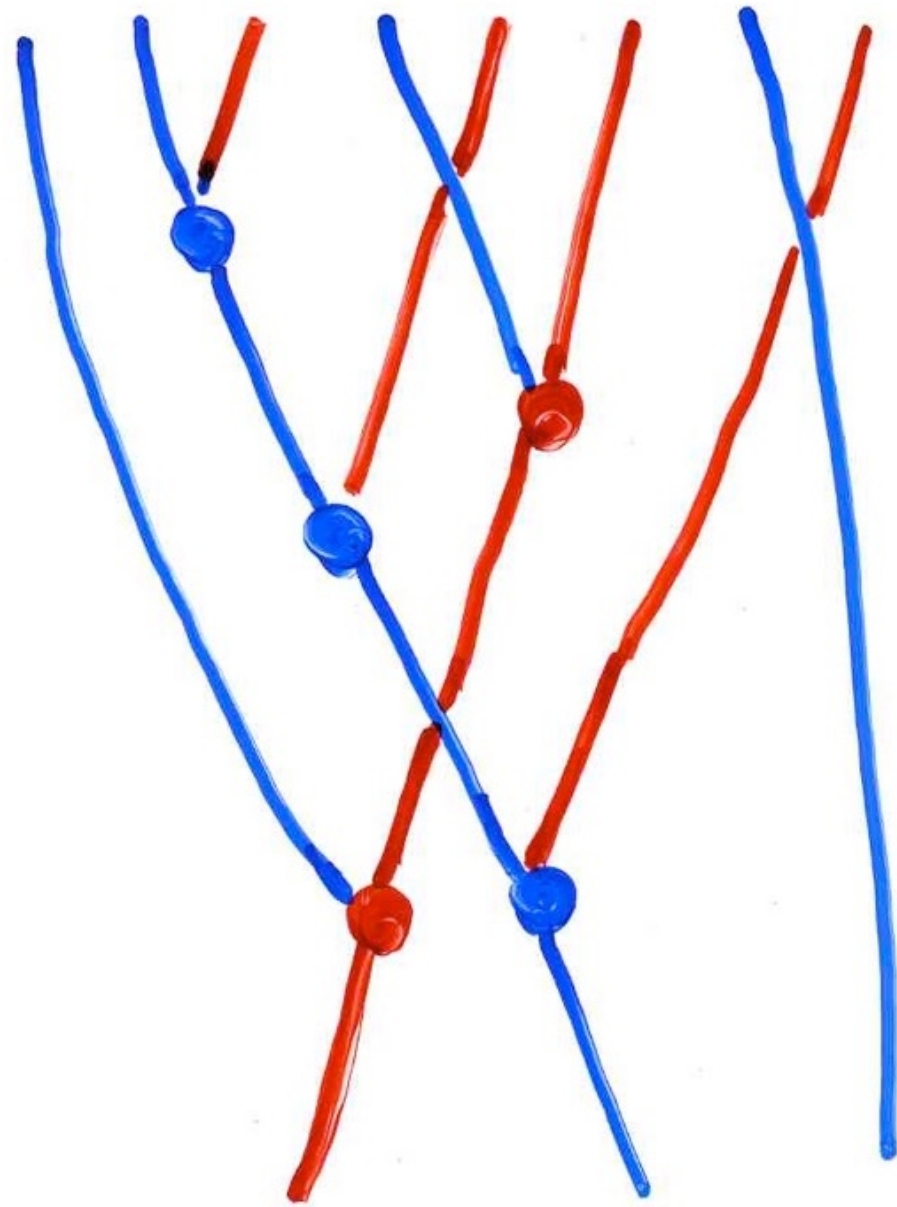










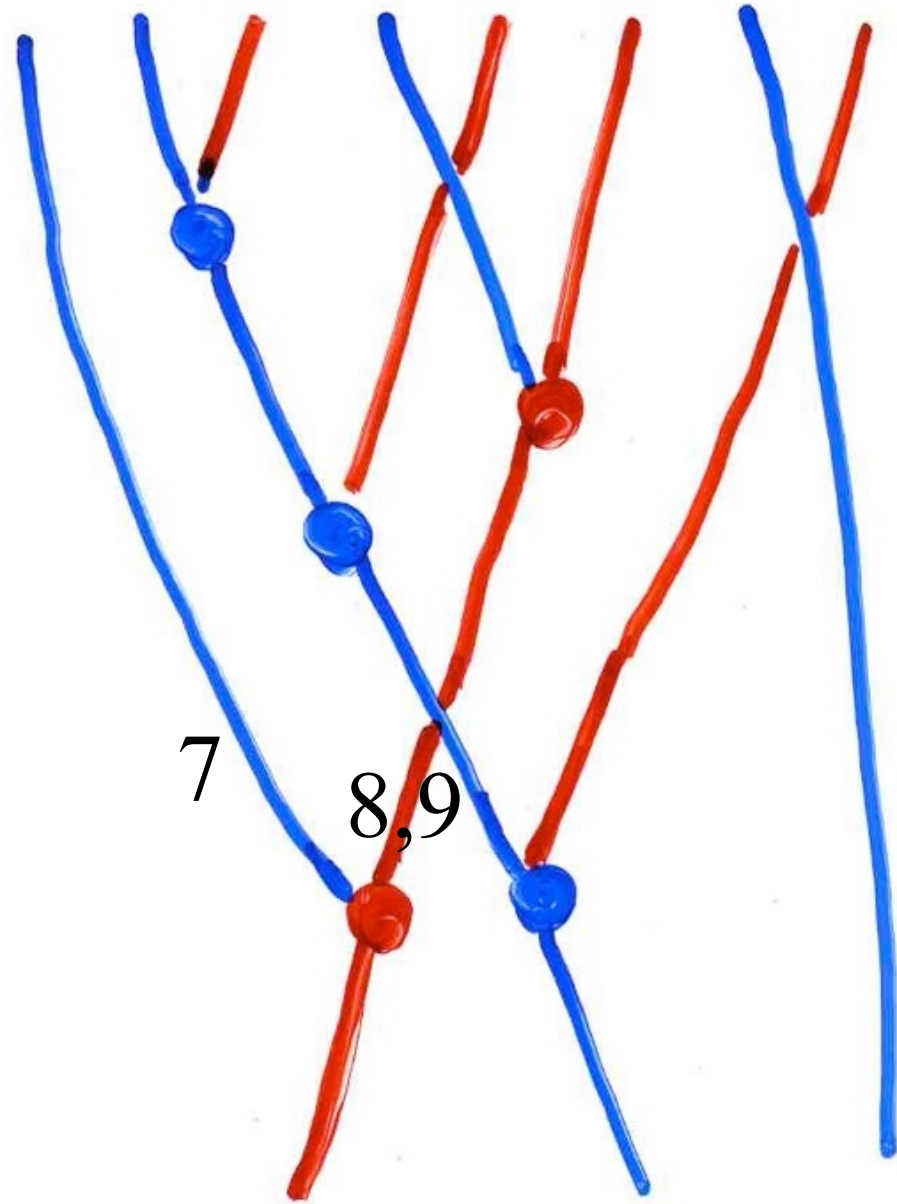


7,8,9

1,2,3,4

5

6



7

8,9

1,2,3,4

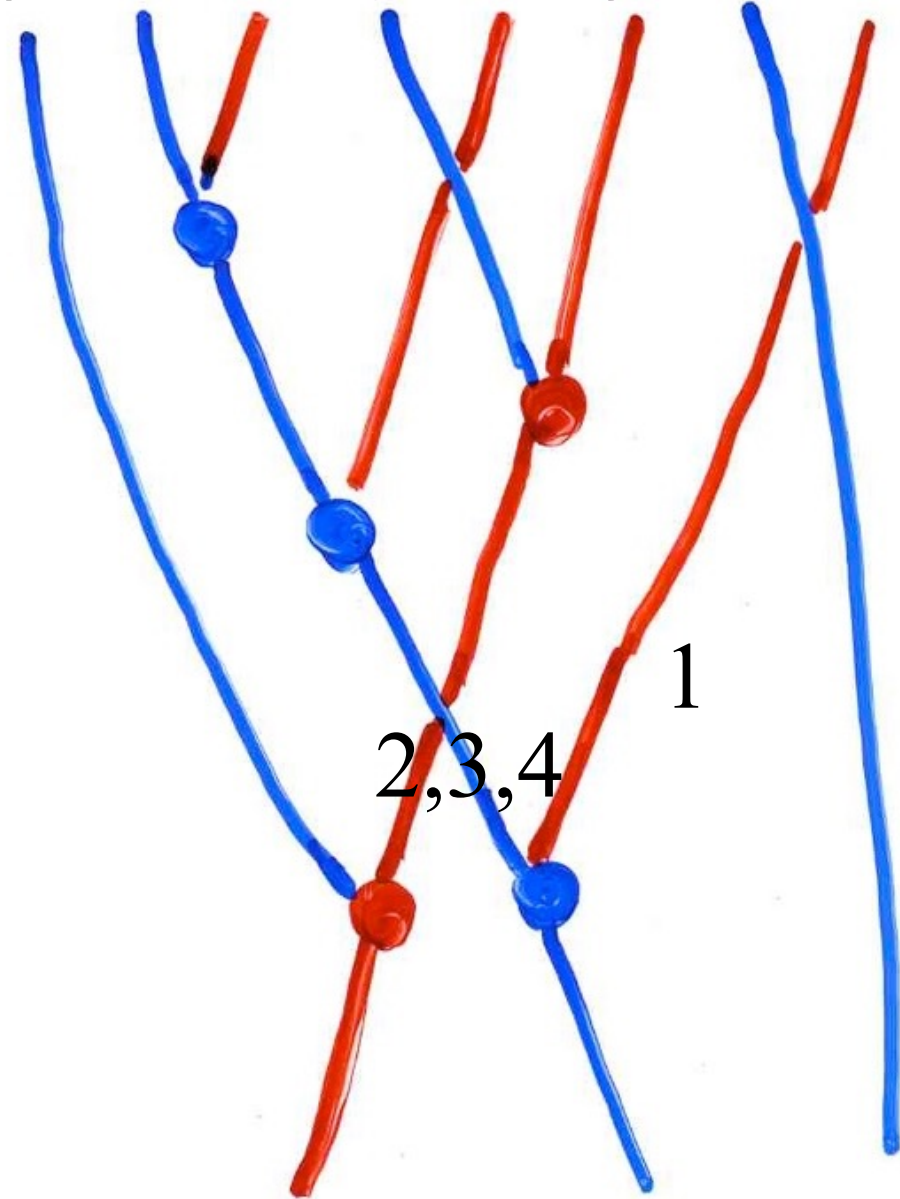
5

6

7

8

9

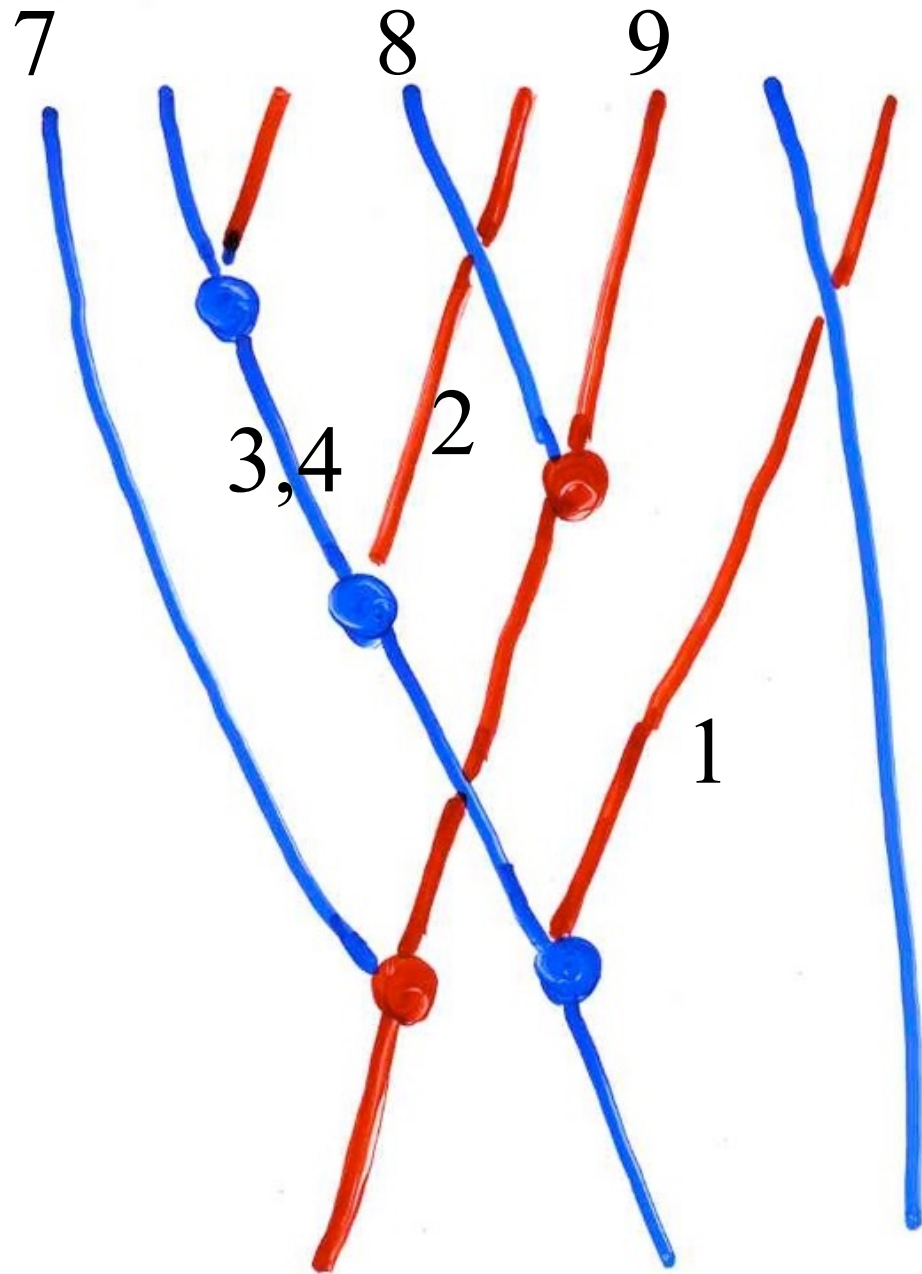


1

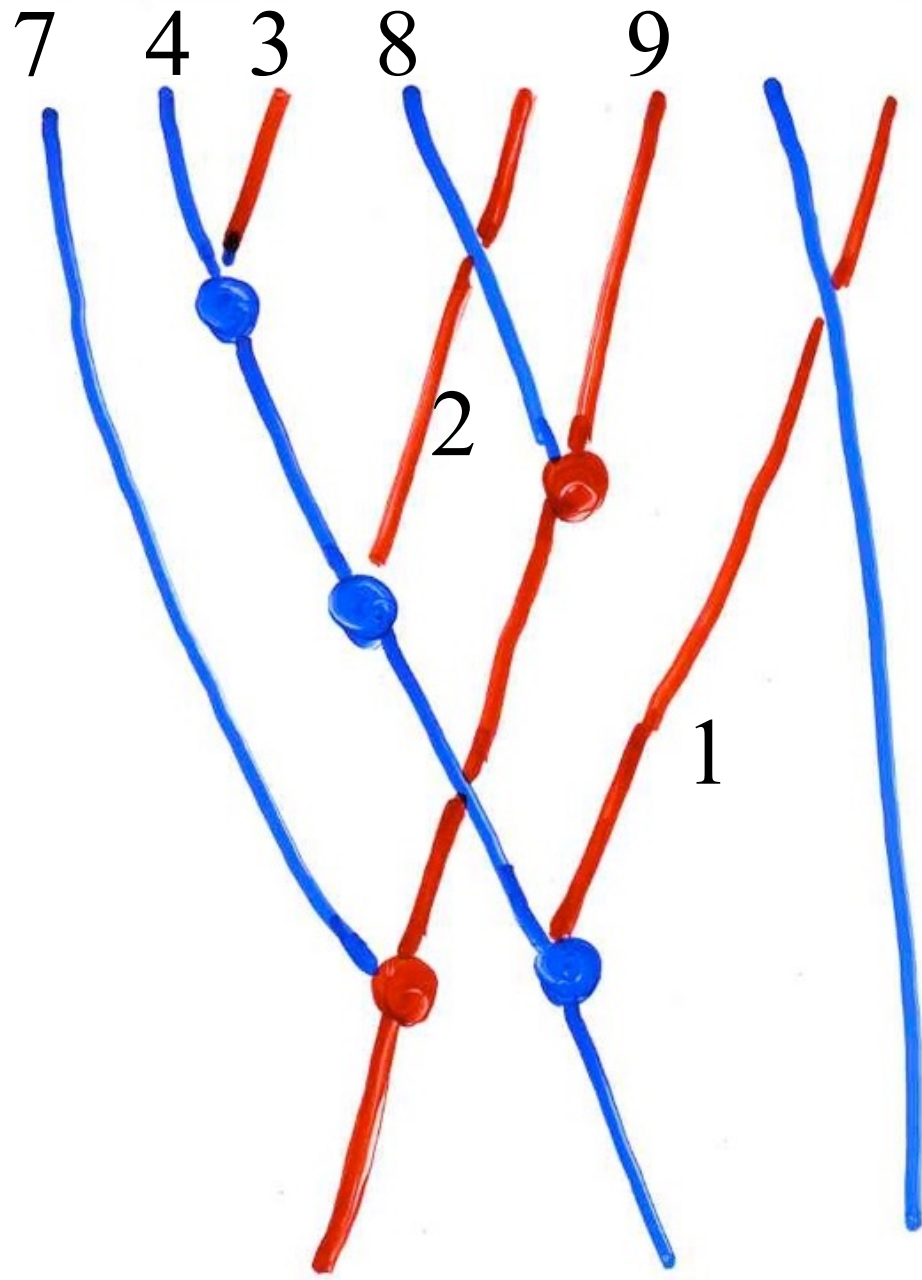
2,3,4

5

6



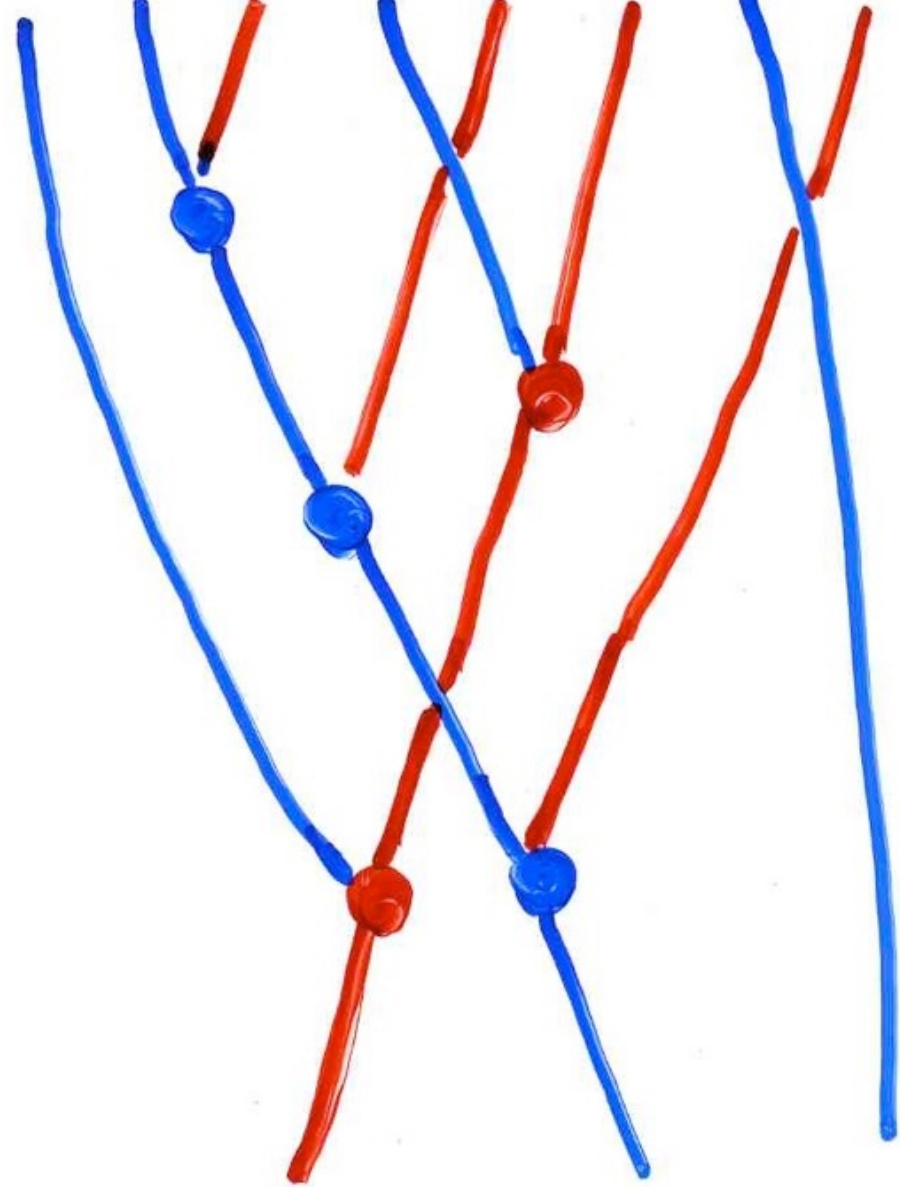
5 6



5

6

7 4 3 8 2 9 5 1 6



Genocchi sequence
of a permutation

Def. Genocchi sequence of a permutation

$$\sigma = \sigma(1) \quad \sigma(n)$$

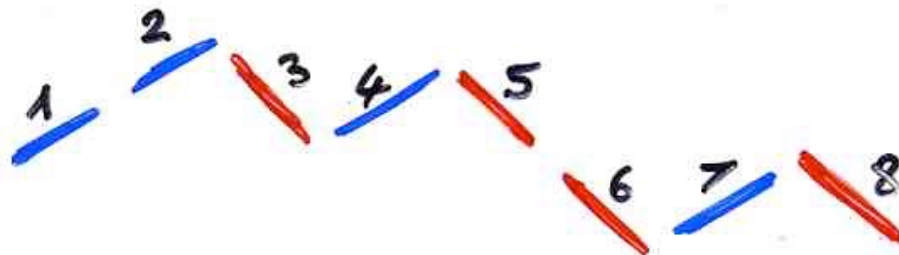
$$G(\sigma) = z_1 \dots z_{n-1}$$

$$z_x = \begin{cases} a & (\text{ascent}) \\ d & (\text{descent}) \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \sigma(i) < \sigma(i+1) \\ \text{"value"} \quad \text{"index"} > \sigma(i+1) \end{matrix}$$

$1 \leq x \leq n-1$

convention: $\sigma(n+1) = 0$ ($\sigma(n)$ is a descent)

ex: $\sigma = (8 \ 5 \ 3 \ 2 \ 7 \ 9 \ 1 \ 4 \ 6)$



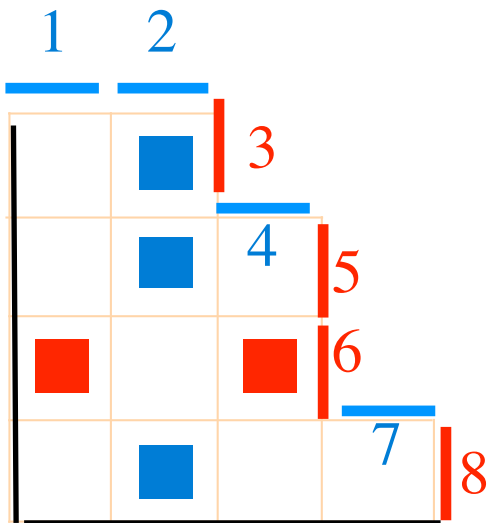
9

σ permutation

(valeur) x $\begin{cases} \text{avance} \\ \text{recul} \end{cases}$ ssi (indice) x $\begin{cases} \text{montée} \\ \text{descente} \end{cases}$

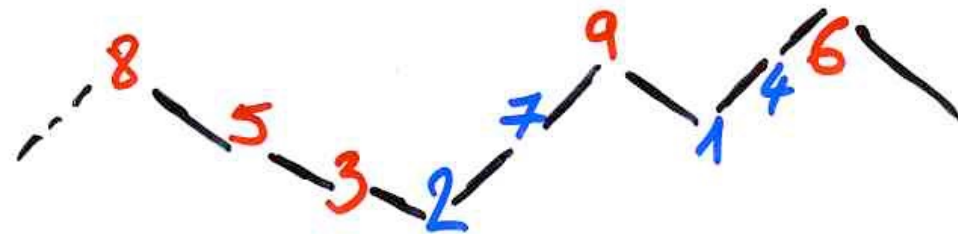
$$\begin{aligned} \sigma(x) &< \sigma(x+1) \\ \sigma(x) &> \sigma(x+1) \end{aligned}$$

convention: $\sigma(n)$ descente



$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 2 & 9 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 7 & 9 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$



9

“Genocchi shape” of a permutation

alternating sequence dadad...ada

Prop. - (Dumont, 1974)

The nb of permutations on $\{1, 2, \dots, 2n\}$ having an alternating Genocchi sequence is the Genocchi numbers G_{2n+2}

nombres de
Genocchi

$$G_{2n} = 2(2^{2n} - 1) B_{2n}$$

Bernoulli

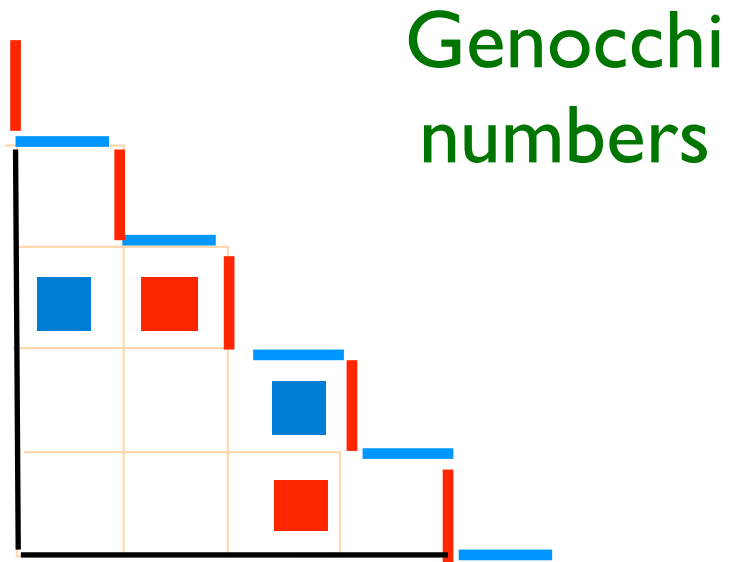
$$2^{2n} G_{2n+2} = (n+1) T_{2n+1}$$

nombre de
Genocchi

$$G_{2n} = 2(2^{2n} - 1) B_{2n}$$

Bernoulli

$$2^{2n} G_{2n+2} = (n+1) T_{2n+1}$$



alternating shape



Angelo Genocchi
1817 - 1889

Hinc igitur calculo instituto reperietur :

$$A = 1$$

$$B = 1$$

$$C = 3$$

$$D = 17$$

$$E = 155 = 5.31$$

$$F = 2073 = 691.3$$

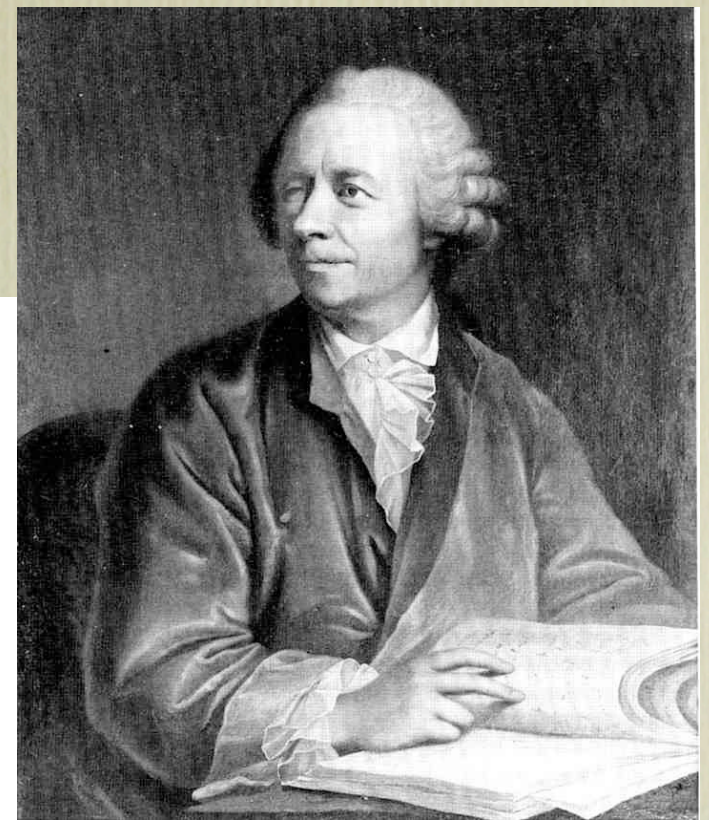
$$G = 38227 = 7.5461 =$$

$$7. \frac{127.129}{3}.$$

$$H = 929569 = 3617.257$$

$$I = 28820619 = 43867.9.73$$

&c.



BORDEAUX 1. Le professeur Donald Knuth consacre sa vie à la programmation informatique, considérée comme un art. Il vient d'être sacré docteur honoris causa à Bordeaux

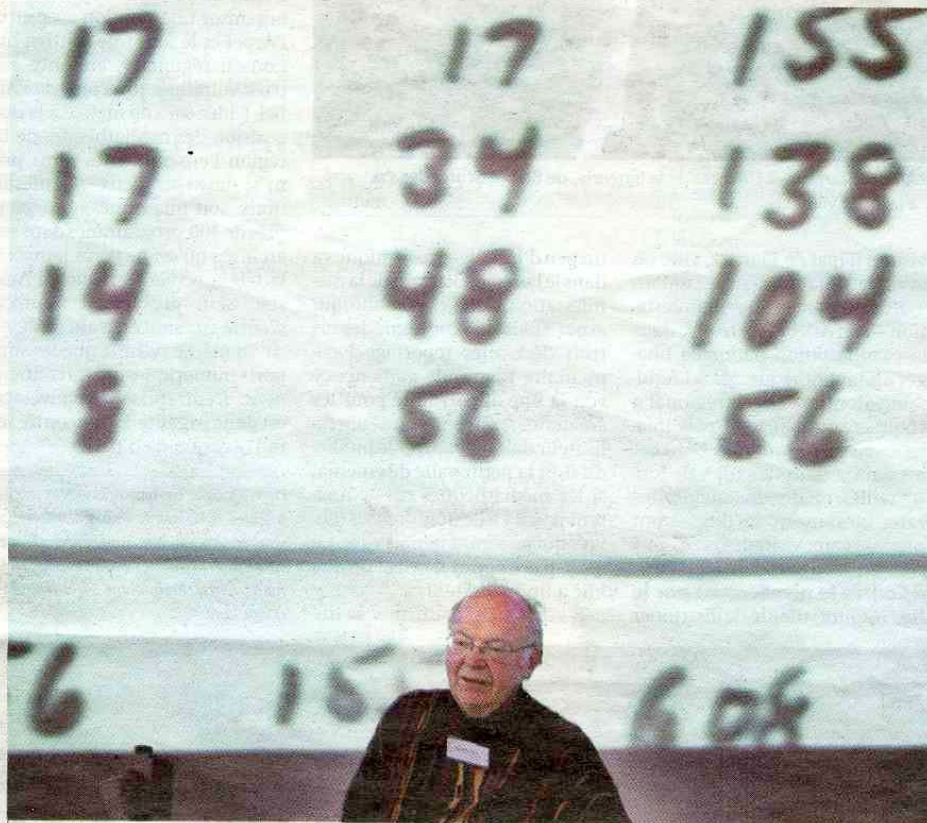
L'ermite de l'informatique

de Bernard Broustet

Une sommité de l'informatique mondiale a séjourné en Gironde ces derniers jours. Donald Knuth, 69 ans, a été sacré mardi docteur honoris causa de l'université Bordeaux 1, après avoir été lundi au centre d'une journée d'échanges qui réunissait une bonne partie du gratin français et européen de la recherche en informatique (1).

Depuis son premier contact, il y a un demi-siècle, avec un monumental et dinosaurien IBM 650, Donald Knuth n'a cessé d'être habité par la passion de l'informatique. Physicien, puis mathématicien de formation, ce géant affable et modeste a voué sa vie à ce qu'il appelle « l'art de la programmation informatique ». Car, à ses yeux, plus qu'une technique, c'est une forme d'activité qui requiert à la fois rigueur, intuition et sens esthétique. Les programmes informatiques réussis ont une sorte de beauté à laquelle même les non-spécialistes peuvent être sensibles.

Une encyclopédie. Au long de sa carrière académique (pour l'essentiel à l'université californienne de Stanford), Donald Knuth a fait preuve d'une grande fécondité, en jouant notamment un rôle essentiel dans le développement de langages toujours utilisés par la communauté des mathématiciens. Mais, à 55 ans, le professeur Knuth a décidé de prendre sa retraite de Stanford. Il trouve que les fonctions administratives sont trop absorbantes pour lui permettre de mener à bien l'œuvre entamée à la fin des années 60 sous le titre de « Art of computer programming », sorte d'encyclopédie de l'algorithmique et de la programmation informati-



Donald Knuth, à Bordeaux, le 29 octobre. À 69 ans, il aimait une journée d'échanges avec le gratin européen de la recherche en informatique

PHOTO LAURENT THEILLET

que. Donald Knuth a publié, il y a quelque temps déjà, les trois premiers volumes de cette gigantesque somme, traduite en russe, en japonais, en polonais, etc. mais pas en français. Le quatrième tome est pour bientôt. Et Donald Knuth se dit décidé à poursuivre sa tâche tant qu'il en aura la force. Ses ouvrages, dont les ventes cumulées au fil des ans approchent le million d'exemplaires, visent essentiellement les informaticiens et créateurs de programmes. Une communauté cer-

tes minoritaire à travers le monde, mais qui se trouve investie d'une mission considérable. En quelques décennies, l'écriture informatique a aidé à résoudre d'innombrables problèmes. « Mais il y en a tant d'autres qui attendent des solutions, notamment dans le domaine médical », affirme le professeur émérite de Stanford.

Un chèque de 2,56 dollars. Pour mener à bien sa tâche, Donald Knuth s'est imposé une vie

d'ermite. D'ordinaire, sa journée débute par la bibliothèque ou la piscine. Après quoi, il passe tout le reste de son temps à sa table de travail, dimanche compris. Il n'a plus d'e-mail depuis le début des années 90, considérant que le courrier électronique représente une perte de temps, dès lors qu'on veut aller au fond des choses et non pas rester à leur surface. Une secrétaire lui fait passer les messages considérés comme les plus urgents. Pour le reste, Donald Knuth demande qu'on lui

écrive par courrier ordinaire ou par fax, dont il prend parfois connaissance avec des mois de retard. Il s'oblige, en revanche, à tenir aussi scrupuleusement que possible sa promesse d'envoyer un chèque de 2,56 dollars à tout lecteur ayant détecté une erreur dans un de ses livres. Par ailleurs, pour se détendre, il pratique l'orgue, appris dans sa prime jeunesse auprès de son père qui partagea sa vie entre la musique et l'enseignement.

L'orgue de Sainte-Croix. Donald Knuth n'est pas fermé aux choses de ce monde. Sur son site Internet, à la rubrique « Questions qui ne me sont pas fréquemment posées », il demande entre autres : « Pourquoi mon pays a-t-il le droit d'occuper l'Irak ? », « Pourquoi mon pays ne soutient-il pas une Cour internationale de justice ? » Mais cet homme de conscience ne se veut pas militant, pas plus qu'il n'aspire au vedettariat et à la richesse. « Beaucoup de gens, dit-il, ont tendance à considérer que l'informatique, c'est surtout des histoires de business, d'entreprise. Ce n'est pas mon cas. » Sortant de sa semi-réclusion, Donald Knuth s'est donc laissé convaincre d'accepter les hommages de l'université de Bordeaux, après celles de Harvard, d'Oxford, de Tübingen. Il a eu le coup de foudre pour la beauté et l'agrément de la ville. Et il n'oubliera sans doute pas de sitôt l'orgue illustre de l'église Sainte-Croix (2), sur lequel il a eu le bonheur d'exercer son talent.

(1) Ces journées étaient organisées par le Laboratoire bordelais de recherche en informatique (Labri).

(2) Thierry Semenoux, professeur d'orgue au conservatoire de Bordeaux, a joué dans ce domaine un rôle de cicérone auprès de Donald Knuth.

some parameters

The maximum letter of the blocks of letters reaching the ground level are:

- for the **columns** of T (**red threads**), the **left-to-right maximum elements** of the values of the **permutation s** less than the last letter $s(n+1)$,
 - for the **rows** of T (**blue threads**), the **right-to-left maximum elements** of the values of the **permutation s** bigger than the last letter
- (3 proofs coming 3 different methodologies: by P. Nadeau , O.Bernardi and xgv)

This gives an interpretation of the two parameters on **alternative tableaux**:

- number of “**open**” **columns** (i.e. columns without a red cell)
- number of “**open**” **rows** (i.e. rows without a blue cell)

total order

$\{1, 2, \dots, n\}$

$\sigma = 7 \ 2 \ 3 \ 9 \ 6 \ 8 \ 5 \ 1 \ 4$
word

left-to-right
right-to-left

minimum elements

$\sigma = \textcircled{7} \ \textcircled{2} \ 3 \ 9 \ 6 \ 8 \ 5 \ \boxed{1} \ \boxed{4}$

left-to-right
right-to-left

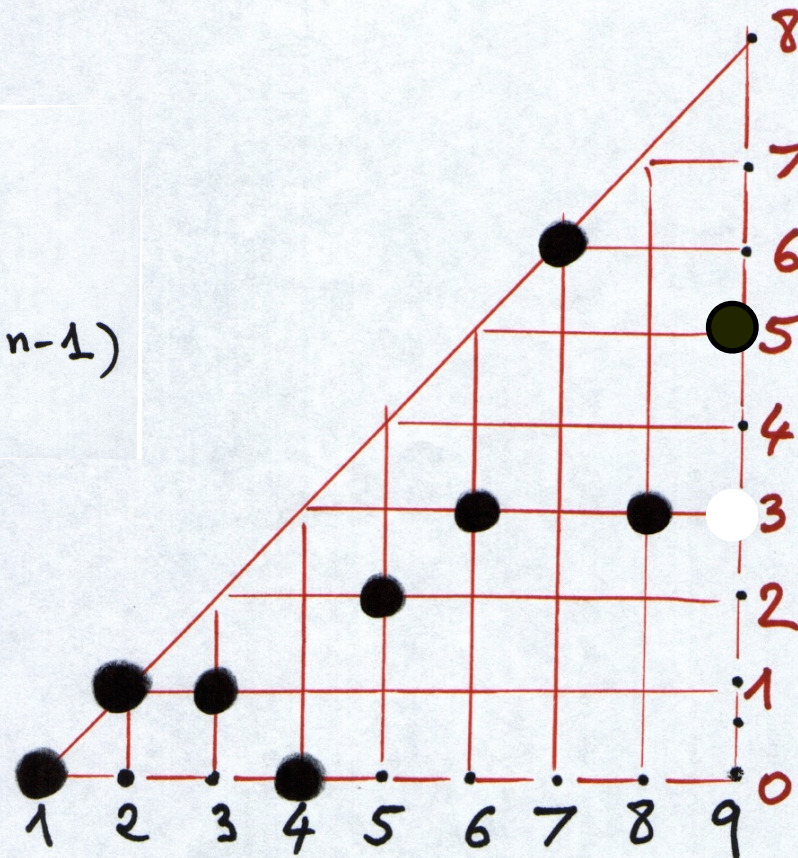
minimum elements

$$\sigma = \textcircled{7} \textcircled{2} 3 9 6 8 5 \boxed{1} \boxed{4}$$

Stirling numbers $S_{n,k}$

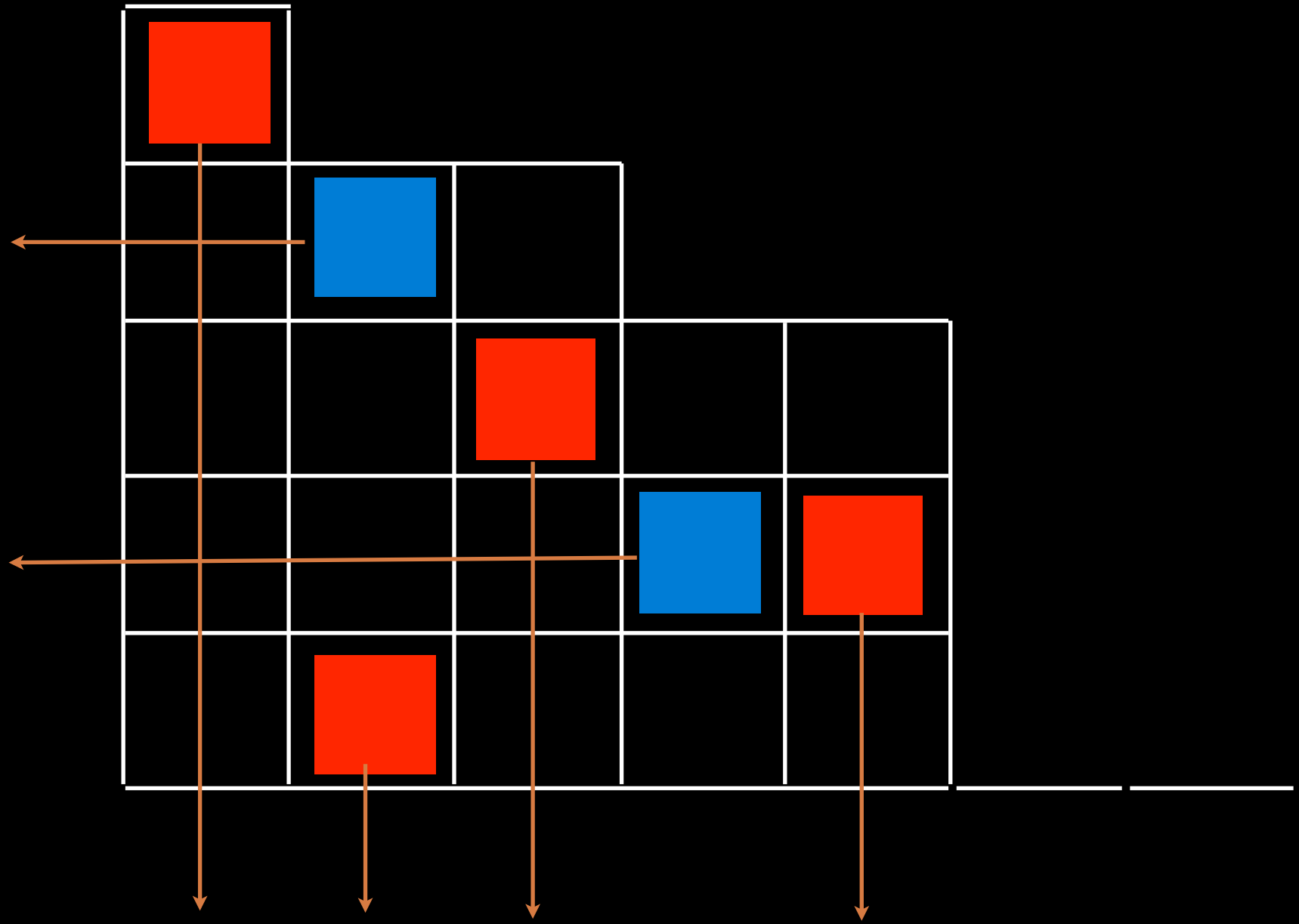
$$\sum_{k=1}^n S_{n,k} x^k = x(x+1)\dots(x+n-1)$$

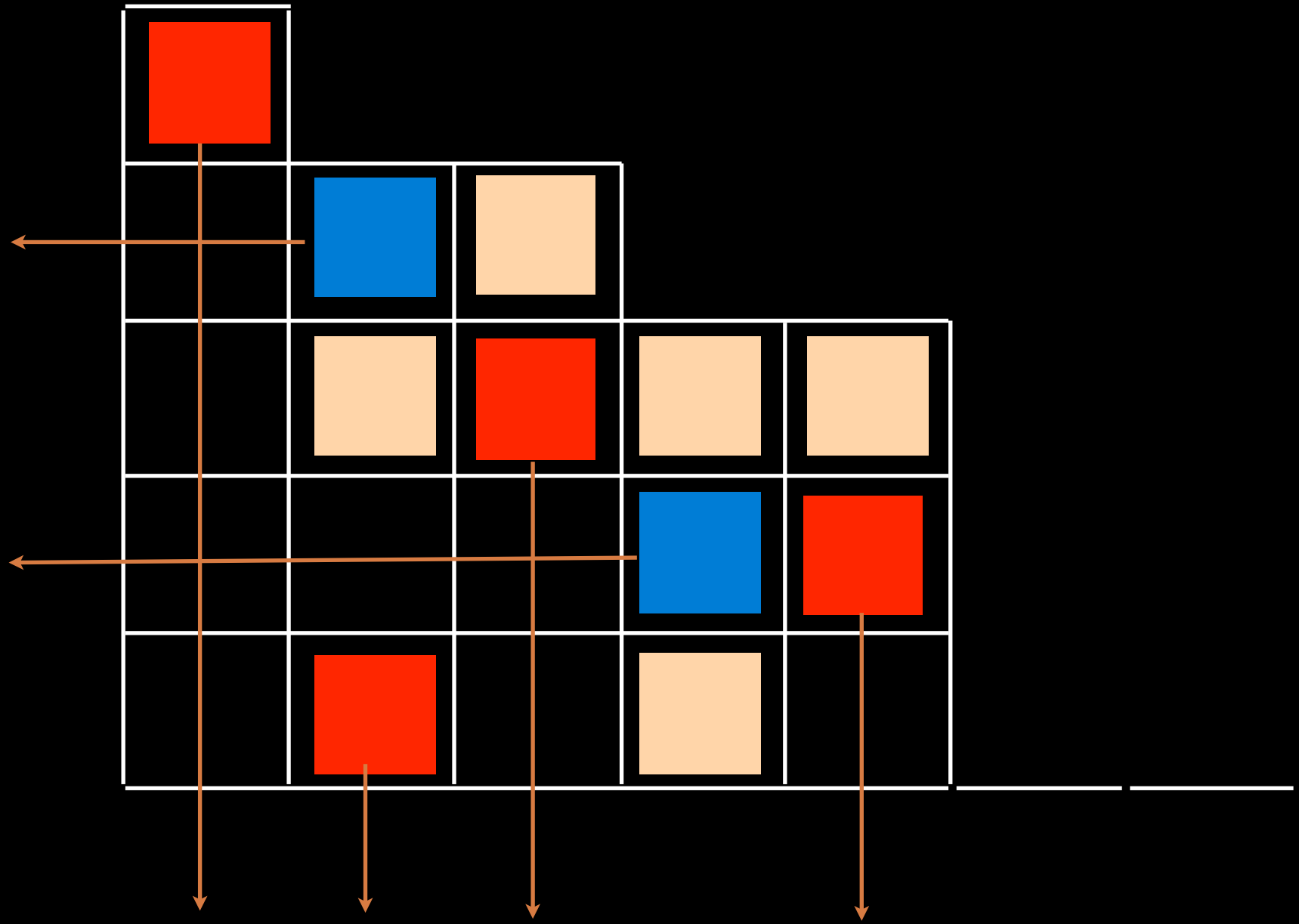
$$xy(x+y)(x+1+y)\dots(x+n-2+y)$$



Def- **Crossing** of an **alternating tableau**:
a **non-colored** cell which is
neither at the **left** of a **blue** cell
neither **below** a **red** cell

crossing of **alternating tableau**
exchange in the "exchange-fusion"
algorithm





From work of Corteel, Nadeau,
Steingrimsón, Williams
we know that parameter
"number of crossing" in alternating
tableaux :

same distribution as
"q-analog of Laguerre histories"

orthogonal polynomials

• Orthogonal polynomials

→ Sasamoto (1999)

→ Blythe, Evans, Colaiori, Essler (2000)

q -Hermite polynomial
 α, β, q $\gamma = \delta = 1$

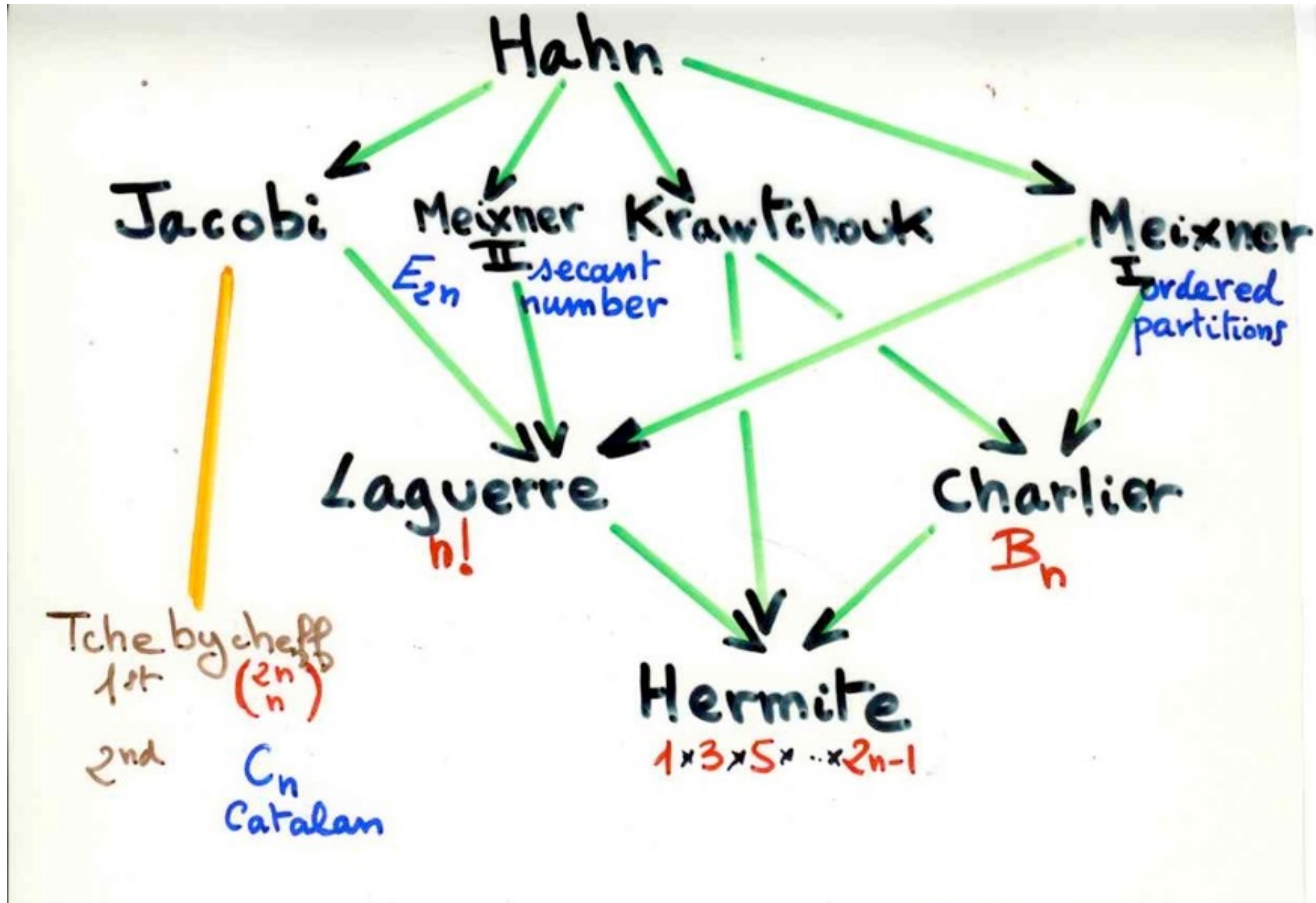
$$D = \frac{1}{1-q} + \frac{1}{\sqrt{1-q}} \hat{a}$$
$$E = \frac{1}{1-q} + \frac{1}{\sqrt{1-q}} \hat{a}^\dagger$$
$$\hat{a} \hat{a}^\dagger - q \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1$$

→ Uchiyama, Sasamoto, Wadati (2003)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$

Askey-Wilson polynomials

Askey-Wilson



references

references:

xgv website :

page “video”

[“Alternative tableaux, permutations and asymmetric exclusion process”](#)

conference 23 April 2008,

Isaac Newton Institute for Mathematical science



or <http://www.newton.cam.ac.uk/> (page “web seminar”)

