

INTERPRÉTATIONS COMBINATOIRES DES NOMBRES  
D'EULER ET DE GENOCCHI

par

Gérard VIENNOT

-:-:-:-

Résumé. - Cet article est un article de synthèse sur la "théorie combinatoire" des nombres d'Euler et de Genocchi. Il peut aussi constituer pour le lecteur non spécialiste une introduction à ce nouveau domaine, appelé la "combinatoire bijective", actuellement en pleine expansion. Enfin, nous donnons quelques résultats nouveaux et une liste de problèmes ouverts.

Abstract. - This paper is a survey of the "combinatorial theory" of Euler and Genocchi numbers. For the non-specialist reader, it can be used as an introduction to the rapidly increasing new field called "bijective combinatorics". We also give some new results and a list of open problems.

- § 1. - Introduction
- § 2. - Les bijections et objets combinatoires élémentaires
  - 2.1. - Notations
  - 2.2. - Permutations
  - 2.3. - Tables d'inversions
  - 2.4. - Arbres binaires croissants
  - 2.5. - Forêts d'arbres croissants
  - 2.6. - Permutations et chemins valués
- § 3. - Equations différentielles et interprétations combinatoires des nombres d'Euler
  - 3.1. - Permutations alternantes
  - 3.2. - Permutations de Jacobi
  - 3.3. - Permutations d'André
  - 3.4. - Bijections et nombres d'Euler
- § 4. - Matrices de Seidel des nombres d'Euler et de Genocchi
  - 4.1. - Matrices de Seidel
  - 4.2. - Tableau de Kempner
  - 4.3. - Pistolets alternants
- § 5. - Génération de Gandhi des nombres de Genocchi
  - 5.1. - Polynômes de Gandhi
  - 5.2. - Pistolets surjectifs
  - 5.3. - Démonstration "bijective" de la conjecture de Gandhi
  - 5.4. - La symétrie ternaire des nombres de Genocchi
  - 5.5. - Hauteur des pics des permutations alternantes
- § 6. - Déterminants
  - 6.1. - Déterminants et chemins
  - 6.2. - Déterminants et nombres d'Euler
  - 6.3. - Déterminants et nombres de Genocchi
  - 6.4. - Inversions de matrices de coefficients binomiaux

## § 7. - Fractions continuées

7.1. - Fractions continuées et chemins valués

7.2. - Interprétation combinatoire de quelques développements en fractions continuées

## § 8. - Fonctions elliptiques de Jacobi

## § 9. - Problèmes ouverts

§ 1. - Introduction

Les nombre d'Euler  $E_m$ ,  $m \geq 0$ , sont les entiers apparaissant dans les développements en série sous forme exponentielle des fonctions tangente et sécante :

$$(1.1) \quad \operatorname{tg} t = \sum_{n \geq 1} E_{2n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} ,$$

$$(1.2) \quad \operatorname{sect} t = \frac{1}{\cos t} = \sum_{n \geq 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} .$$

Ils sont aussi appelés respectivement nombre tangents pour  $m = 2n-1$  impair et nombre sécants pour  $m = 2n$  pair.

Les nombre de Genocchi  $G_{2n}$ ,  $n \geq 1$ , sont des entiers définis à partir des nombre de Bernoulli  $B_{2n}$ ,  $n \geq 1$ , par la relation suivante :

$$(1.3) \quad G_{2n} = 2(2^{2n} - 1) B_{2n} \quad (n \geq 1) .$$

Les séries génératrices exponentielles (plus exactement celles de  $(-1)^n G_{2n}$  et  $(-1)^{n+1} B_{2n}$ ) sont respectivement :

$$(1.4) \quad \frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n \geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} ,$$

$$(1.5) \quad \frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} .$$

Enfin les nombre de Genocchi sont reliés aux nombre tangents par l'identité suivante :

$$(1.6) \quad 2^{2n} G_{2n+2} = (n+1) E_{2n+1} \quad (n \geq 0) .$$

Les premières valeurs de ces nombre sont donnés dans la table 1 :

n	1	2	3	4	5	6	7
$B_{2n}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$
$G_{2n}$	1	1	3	17	155	2073	38227
$E_{2n-1}$	1	2	16	272	7936	353792	22368256
$E_{2n}$	1	5	61	1385	50521	2702765	199360981

Table 1

Donner une interprétation combinatoire de ces nombres entiers consiste à définir une classe d'objets combinatoires les dénombrant. Le lecteur non "combinatoriste" aura une idée plus précise de ce que l'on entend par "objet combinatoire" à travers les nombreux exemples utilisés ci-dessous : permutations, arbres binaires, pistolets, chemins valués, etc.

Une preuve bijective d'une identité (comme par exemple (1.6)) consiste à trouver une bijection entre les objets combinatoires énumérant le membre de gauche et ceux énumérant le membre de droite.

Remarquons tout de suite qu'il n'y a pas de relation apparente entre la longueur, la difficulté, le caractère "naturel", voir l'intérêt, d'une preuve analytique (par le calcul) et celle d'une preuve bijective. Par exemple, l'identité (1.6) est un cas extrême : la preuve analytique est immédiate (et sans intérêt), alors que la preuve bijective reste encore à trouver, malgré toutes les approches prometteuses qui ont été faites (voir §.9). Signalons que ces approches ont conduit à l'introduction de bijections, fondamentales pour d'autres problèmes combinatoires.

Les différentes interprétations combinatoires, les bijections les reliant entre elles, ainsi que celles expliquant les identités et propriétés satisfaites par les nombres d'Euler et Genocchi, constituent ce que l'on pourrait appeler la théorie combinatoire de ces nombres. Ceux-ci étant des entiers très proches des nombres de Bernoulli, nombres riches en identités et propriétés (voir par exemple le livre de Nielsen [51]), on peut s'attendre à ce que cette combinatoire soit fructueuse.

L'un des buts de cet article est d'exposer les principaux résultats de cette théorie combinatoire, commencée il y a cent ans par D. André [1], [2], [3], [4], puis reprise après une éclipse presque totale par D. Foata et M. P. Schützenberger en 1970, et depuis activement développée. En fait, le lecteur se convaincra à travers les problèmes ouverts, que l'on commence seulement à découvrir toute une "géométrie combinatoire" qui reste encore en grande partie cachée.

Les fonctions elliptiques de Jacobi  $sn$ ,  $cn$  et  $dn$  font aussi partie de cette étude (leurs interprétations combinatoires sont des raffinements de celles des nombres d'Euler). Nous ne ferons qu'esquisser la combinatoire sous-jacente que l'on commence seulement depuis peu à découvrir (voir Flajolet [21], Dumont [16], [18], [19] et Viennot [67]).

Signalons que certains résultats sont présentés ici pour la première fois.

Le deuxième but de cet article est aussi d'inciter le lecteur à parcourir d'autres théories combinatoires, se situant à un niveau plus général, dont certaines ont été développées à partir des interprétations et bijections exposées ci-dessous. Citons par exemple les théories combinatoires des développements en fractions continuées (Flajolet [21]) et des polynômes orthogonaux généraux (Viennot [70]) dans lesquelles la bijection entre permutations et chemins valués du §.2 est fondamentale pour retrouver les développements et polynômes classiques ; le composé partitionnel abélien (Foata [28]) constituant un "modèle" combinatoire des séries génératrices exponentielles ; une théorie combinatoire des déterminants (Gessel et Viennot [35], [36], [37]).

Nous terminons cette introduction en citant deux applications récentes de ce point de vue "bijectif" développé actuellement en Combinatoire : l'une en Automatique non linéaire, l'autre en Informatique.

Les permutations alternantes introduites au paragraphe 3, peuvent être considérées comme une interprétation combinatoire de la solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1.7) \quad y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

En théorie des systèmes, l'équation

$$(1.8) \quad y' = y^2 + u(t)$$

est un exemple d'équation différentielle en "régime forcé", avec  $u(t)$ , fonction réelle, comme "entrée". La solution (fonction de la fonction  $u$ ) s'exprime alors comme une série infinie. Chaque terme, appelé noyau de Volterra, étant muni d'un certain coefficient (en fait entier dans cet exemple). La résolution de (1.8) revient en théorie au calcul de ces coefficients. Il est remarquable que ces coefficients soient en fait "portés" par l'interprétation combinatoire de l'équation (1.7) : ils dénombrent certaines classes de permutations alternantes. La bijection entre les permutations et certains chemins valués conduit alors à une "formule" explicite (voir Viennot [71]).

D'autre part, Fliess (voir par exemple [24], [25], [46]) a développé une théorie montrant que la résolution d'un système d'équations différentielles en régime forcé revient (théoriquement) à celui d'un système en série formelles en variables non commutatives. Grâce à cette théorie, la combinatoire de l'exemple de l'équation (1.7) peut être faite dans un cadre beaucoup plus général. Ceci conduit à la théorie (combinatoire) des histoires générales (Viennot [71]). L'équation de Duffing (contenant celles satisfaites par les fonctions elliptiques de Jacobi) en est un cas particulier (Lamnabhi-Lagarrigue [46]).

Un deuxième domaine d'application de cette combinatoire "bijective" est en Informatique avec les calculs de coût pour les structures de données (dictionnaire, file de priorité, liste linéaire, table de symbole, pile, etc...). Récemment Flajolet, Françon et Vuillemin [23], ont montrés que l'interprétation combinatoire des fractions continuées donnée au §.6 permettait le calcul du coût moyen de la représentation d'une structure de donnée, intégré sur une séquence aléatoire d'opérations primitives. Auparavant, on ne pouvait (en général) comparer deux structures de données que par le coût moyen d'une seule opération primitive.

## § 2. - Les bijections et objets combinatoires élémentaires

Ce paragraphe est un rappel de certains objets et bijections combinatoires classiques, que nous utiliserons constamment dans cette approche combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi.

### 2.1. - Notations

L'ensemble des entiers  $1, 2, \dots, n$ , est noté classiquement  $[n]$ , celui des  $n!$  permutations sur  $[n]$  est noté  $\mathfrak{S}_n$ . Une permutation  $\sigma$ , comme toute fonction  $f: [n] \rightarrow [n]$ , sera ici écrite comme un mot  $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$ .

L'ensemble des mots écrits avec l'alphabet  $X$  et muni de l'opération de "concaténation"  $(u, v) \rightarrow uv$ , est appelé le monoïde libre engendré par  $X$  et noté  $X^*$ . L'élément unité est le mot vide noté  $e$ . Nous désignons par  $\mathfrak{S}$  l'ensemble des mots multilinéaires du monoïde libre engendré par  $X = \mathbb{N}$ , c'est-à-dire les mots dont les lettres sont des entiers positifs et tels que chaque lettre apparaisse au plus une fois. La longueur d'un mot  $u$  de  $X^*$  est notée  $|u|$ .

### 2.2. - Permutations

Un élément  $x \in [n]$  est dit élément saillant de la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  si  $x$  est la plus petite valeur rencontrée en lisant le mot  $\sigma$  de gauche à droite, c'est-à-dire :

$$(2.1) \quad x = \sigma(i) = \min \{ \sigma(1), \dots, \sigma(i) \} .$$

Remarque 2.1. - Le nombre de permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  ayant  $k$  éléments saillants est le nombre de Stirling (de première espèce)  $s(n, k)$ . C'est aussi le nombre de permutations sur  $[n]$  ayant  $k$  cycles.

Pour  $i, 1 \leq i < n$ , nous dirons que la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  admet une montée (resp descente) sur l'indice  $i$  lorsque  $\sigma(i) < \sigma(i+1)$  (resp.  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ ). La valeur  $x = \sigma(i)$  est appelée montée (resp. descente) de la permutation  $\sigma$ . Remarquons que nous distinguons la notion d'indice  $i$  par opposition à celle de valeur  $\sigma(i)$ . La forme d'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est le mot  $w = w_1 \dots w_{n-1}$  de longueur  $n-1$ , sur l'alphabet à deux lettres  $\{+, -\}$  défini par la relation suivante.



$$(2.2) \quad w_i = + \text{ (resp. -) si } i \text{ est l'indice d'une montée (resp. descente) de } \sigma .$$

Exemple 2.2. - La forme de la permutation  $\sigma = 589473126$  est le mot  $w = ++-+---++$ . La donnée de  $w$  revient à celle de l'ensemble des indices de montées, c'est-à-dire ici  $\{1, 2, 4, 7, 8\}$ . L'ensemble des montées est  $\{1, 2, 4, 5, 8\}$ .

Pour les quatre définitions suivantes (pics, creux, doubles montées, doubles descentes), nous convenons la relation :

$$(2.3) \quad \sigma(0) = \sigma(n+1) = 0 .$$

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , la valeur  $x = \sigma(i) \in [n]$  est dite respectivement

<u>pic</u>	si	$\sigma(i-1) < x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$ ,
<u>creux</u>	si	$\sigma(i-1) > x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ ,
<u>double montée</u>	si	$\sigma(i-1) < x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ .
<u>double descente</u>	si	$\sigma(i-1) > x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$ .

Les ensembles de pics, creux, doubles montées, doubles descentes sont notés respectivement  $P(\sigma)$ ,  $Q(\sigma)$ ,  $DM(\sigma)$ ,  $DD(\sigma)$ . Ces ensembles forment une partition (en blocs éventuellement vides) de  $[n]$ .

Pour l'exemple 2.2, nous avons :

$$P(\sigma) = \{6, 7, 9\}, \quad Q(\sigma) = \{1, 4\}, \quad DM(\sigma) = \{2, 5, 8\}, \quad DD(\sigma) = \{3\}.$$

### 2.3. - Tableaux d'inversions

Une fonction sous-excédante est une application  $f : [n] \rightarrow [0, n-1]$  telle que :

$$(2.4) \quad 0 \leq f(i) < i \quad \text{pour } i \in [n].$$

L'ensemble des fonctions sous-excédante est noté  $\mathfrak{F}_n$ . Leur nombre est évidemment  $n!$ . Une bijection entre permutations et fonctions sous-excédantes est définie par la notion suivante de table d'inversion.

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , définissons  $I(\sigma) = f$  par la relation suivante :

$$(2.5) \quad \text{pour } i \in [n], f(i) \text{ est le nombre d'indices } j \in [n] \text{ tels que } j < i \text{ et } \sigma(j) < \sigma(i).$$

Par exemple, si  $\sigma = 589473126$ , alors

$$I(\sigma) = f = f(1) f(2) \dots f(9) = 012020015.$$

$I(\sigma)$  est une fonction sous-excédante appelée la table d'inversion de la permutation  $\sigma$ . On a immédiatement :

PROPOSITION 2.3. - L'application  $\sigma \rightarrow f = I(\sigma)$  définie par (2.5) est une bijection entre l'ensemble  $\mathfrak{S}_n$  des permutations et l'ensemble  $\mathfrak{F}_n$  des fonctions sous-excédantes.

La terminologie provient du fait que le "nombre d'inversions" de la permutation  $\sigma$  est égal à  $\frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^n f(i)$ .

Vis-à-vis des notions introduites en 2.2, la bijection  $\sigma \rightarrow I(\sigma)$  possède deux propriétés élémentaires :

PROPOSITION 2.4. - Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $f = I(\sigma)$  sa table d'inversion

- (i) x est élément saillant de  $\sigma$  ssi  $f(x) = 0$ ,
- (ii) pour  $i, 1 \leq i < n$ ,  $\sigma(i) < \sigma(i+1)$  (montée) ssi  $f(i) < f(i+1)$ .

En quelque sorte (ii) exprime que la forme de  $\sigma$  se "lit" sur sa table d'inversion.

#### 2.4. - Arbres binaires croissants

La notion d'arbre binaire est usuelle en Informatique et il est plus commode d'en donner, comme les informaticiens, une définition "récursive".

Soit  $E$  un ensemble fini non vide. Un arbre binaire  $b$  sur  $E$  est la donnée d'un triplet  $b = \langle g, r, d \rangle$  dans lequel  $r$  est un élément de  $E$  appelé racine,  $g$  (resp.  $d$ ) un arbre binaire sur un ensemble (éventuellement vide)

$G$  (resp.  $D$ ) tel que  $(G, D)$  forme une partition de l'ensemble  $E \setminus \{r\}$  (ensemble  $E$  privé de l'élément  $r$ ). D'autre part, si  $E$  est l'ensemble vide, un arbre binaire sur  $E$  n'est autre que l'ensemble vide  $\emptyset$ , appelé arbre binaire vide.

Pour un arbre binaire non vide,  $g$  (resp.  $d$ ) est appelé sous-arbre binaire gauche (resp. droit) de  $b$ . Les éléments de  $E$  sont les sommets de  $E$ .

Un arbre binaire est schématisé par un dessin, comme celui de la figure 1.

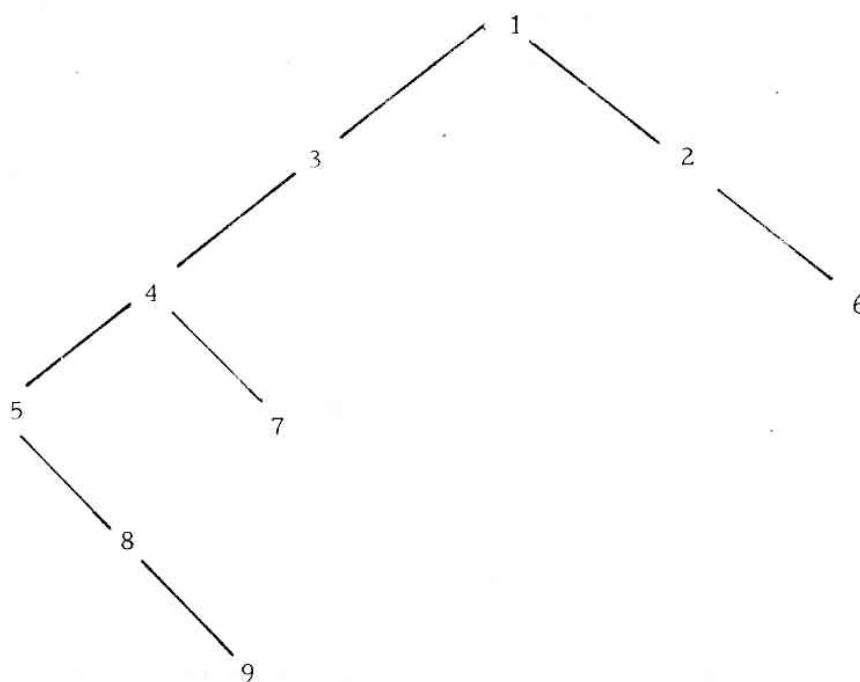


Figure 1 : Un arbre binaire (en fait croissant) sur  $E = \{1, 2, \dots, 9\}$ .

Par exemple l'arbre binaire de la figure 1 est  $b = \langle g, 1, d \rangle$  avec  $d = \langle \emptyset, 2, d' \rangle$  et  $d' = \langle \emptyset, 6, \emptyset \rangle$ ,  $g = \langle g', 3, \emptyset \rangle$ , etc... .

Les sous-arbres d'un sous-arbre de  $b$  sont des sous-arbres de  $b$ . Lorsque  $g$  (resp.  $d$ ) est non vide, sa racine est appelée fil gauche (resp. fil droit) du sommet  $r$ . Cette définition s'étend aux sous-arbres. Un sommet  $x \in E$  est dit double (resp. simple, resp. feuille) si  $x$  a deux fils (resp. un seul fils, resp. pas de fils).

Par exemple, pour l'arbre  $b$  de la figure 1, 4 est point double avec 5 pour fils à gauche et 7 pour fils à droite. L'ensemble des points doubles est  $\{1, 4\}$ , celui des points simples  $\{2, 3, 5, 8\}$ , celui des feuilles  $\{6, 7, 9\}$ .

La branche gauche (principale) d'un arbre binaire  $b$  est définie récursivement comme étant vide si  $b = \emptyset$ , sinon comme l'ensemble (de sommets) formé de la racine  $r$  et de la branche gauche de  $g$  lorsque  $b = \langle g, r, d \rangle$ . On définirait symétriquement la branche droite (principale). Par exemple, pour l'arbre de la figure 1, la branche gauche (resp. droite) est  $\{1, 3, 4, 5\}$  (resp.  $\{1, 2, 6\}$ ).

La hauteur à gauche  $hg_b(x)$  d'un sommet  $x \in E$  de l'arbre binaire  $b = \langle g, r, d \rangle$  est définie récursivement par la relation suivante

$$(2.6) \quad \begin{cases} - \text{si } x = r, & hg_b(x) = 0 \\ - \text{si } x \neq r \text{ et } x \text{ sommet de } g \text{ (resp. } d) \text{ alors} & hg_b(x) = 1 + hg_g(x) \\ & \text{(resp. } hg_b(x) = hg_d(x)). \end{cases}$$

On définit symétriquement la hauteur à droite  $hd_b(x)$ . La hauteur (totale)  $h_b(x)$  est :

$$h_b(x) = hg_b(x) + hd_b(x).$$

Par exemple sur la figure 1, on a :

$$hg_b(8) = 3, \quad hd_b(8) = 1, \quad h_b(8) = 4.$$

**DÉFINITION 2.5.** - Un arbre binaire croissant est un arbre binaire ayant pour sommets une partie  $E$  de  $\mathbb{N}$  et tel que pour tout sommet  $x$  ayant un fils gauche (resp. droit)  $y$ , on ait  $y > x$ .

L'arbre binaire de la figure 1 est un arbre binaire croissant. Nous notons  $\mathfrak{T}_n$  l'ensemble des arbres binaires croissants sur  $[n]$ . En fait leur nombre est  $n!$  et nous donnons maintenant une bijection avec les permutations.

Nous associons récursivement un arbre binaire croissant  $\delta(w)$  à tout mot multilinéaire  $w \in \mathfrak{S}$  par la relation suivante

$$(2.7) \quad \begin{cases} - \delta(e) = \emptyset \quad (\text{mot vide et arbre vide}) \\ - \text{si } w \in \mathfrak{S}, \text{ notons } w = umv \text{ avec } m \text{ désignant la plus petite lettre} \\ \text{de } w, \text{ alors } \delta(w) = \langle \delta(u), m, \delta(v) \rangle. \end{cases}$$

Cet arbre  $\delta(w)$  est appelé le déployé de  $w$ . Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  alors  $\delta(w) \in \mathfrak{T}_n$ . Par exemple le déployé de la permutation  $\sigma = 589473126$  est l'arbre binaire croissant de la figure 1.

Réciproquement, si  $b$  est un arbre binaire croissant de  $\mathfrak{T}_n$ , nous associons une permutation  $\sigma = \pi(b)$ , appelée projection de  $b$ , par la récurrence suivante :

$$(2.8) \left\{ \begin{array}{l} - \pi(\emptyset) = e \text{ (arbre vide et mot vide),} \\ - \text{si } b = \langle g, r, d \rangle \text{ arbre binaire croissant, } \pi(b) \text{ est le mot} \\ \quad \pi(g) r \pi(d) \text{ (concaténation des mots).} \end{array} \right.$$

Remarque 2.6. - En lisant (de gauche à droite) les lettres du mot  $\sigma$ , on "parcourt" en fait les sommets de  $b$  dans un certain ordre, appelé ordre symétrique, notion très classique en Informatique (voir par exemple Knuth [41]).

Il est aisé de montrer la proposition :

PROPOSITION 2.7. - L'application  $\delta : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{T}_n$  définie par (2.7) est une bijection entre les permutations et les arbres binaires croissants sur  $[n]$ .

La bijection réciproque est l'application  $\pi$  définie par (2.8).

En fait nous aurons besoin d'une autre définition, non récursive, de l'application  $\delta$ .

DÉFINITION 2.8. - Soient  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $x \in [n]$ . Il existe une unique factorisation du mot  $\sigma$ , appelée la x-factorisation de  $\sigma$ , vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i)  $\sigma = u \lambda(x) x \rho(x) v$  dans lequel  $u$ ,  $\lambda(x)$ ,  $\rho(x)$  et  $v$  sont des mots (éventuellement vides) de  $[n]^*$ ,
- (ii) les lettres de  $\lambda(x)$  et  $\rho(x)$  sont  $> x$ ,
- (iii) les longueurs  $|\lambda(x)|$  et  $|\rho(x)|$  sont maximales parmi les factorisations vérifiant (i) et (ii).

En d'autres termes, soit  $u$  (resp.  $v$ ) est vide, soit sa dernière (resp. première) lettre est  $< x$ . On peut alors déduire :

PROPOSITION 2.9. - Soient  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ ,  $x \in [n]$  et  $b = \delta(\sigma) \in \mathfrak{T}_n$ . Le sommet  $x$  de  $b$  n'a pas de fils gauche (resp. droit) ssi  $\lambda(x) = e$  (resp.  $\rho(x) = e$ ). Dans le cas contraire, le fils gauche (resp. droit) de  $x$  est la plus petite lettre du mot  $\lambda(x)$  (resp.  $\rho(x)$ ). Le sous-arbre gauche (resp. droit) de  $b$  enraciné en  $x$  est  $\delta(\lambda(x))$  (resp.  $\delta(\rho(x))$ ).

Exemple 2.10. - Pour  $\sigma = 589473126$  et  $x = 4$ , la  $x$ -factorisation est  $\sigma = (589) 4(7) 3126$  avec  $u = e$ ,  $\lambda(4) = 589$ ,  $\rho(4) = 7$ ,  $v = 3126$ . Le fils gauche de 4 dans  $\delta(\sigma)$  est 5 et le fils droit est 7, ce qui correspond bien à la figure 1.

De la proposition 2.9, on déduit aisément les deux propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.11. - Soient  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\delta(\sigma)$  le déployé de  $\sigma$  défini en (2.7) et  $x \in [n]$ .

(i) Alors  $x$  est une feuille (resp. point double, resp. point simple avec fils à droite, resp. point simple avec fils à gauche) ssi  $x$  est un pic (resp. creux, resp. double montée, resp. double descente) de la permutation  $\sigma$ .

(ii) La branche gauche de  $\delta(\sigma)$  est l'ensemble des éléments saillants de  $\sigma$ .

Le lecteur comparera l'arbre  $\delta(\sigma)$  de la figure 1 avec les ensembles  $P(\sigma) = \{6, 7, 9\}$  (pics),  $Q(\sigma) = \{1, 4\}$  (creux),  $DM(\sigma) = \{2, 5, 8\}$  (doubles montées) et  $DD(\sigma) = \{3\}$  (double descente).

## 2.5. - Forêts d'arbres croissants

Après les tables d'inversions de la section 2.3, nous donnons une deuxième bijection entre les permutations  $\mathfrak{S}_n$  et les fonctions sous-excédantes  $\mathfrak{F}_n$ .

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , soit  $\eta(\sigma) = f$  la fonction définie par la relation :

$$(2.9) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } x \in [n], \text{ avec } x = \sigma(i), f(x) = y \text{ tel que :} \\ - y = 0 \text{ si } x \text{ est élément saillant de } \sigma, \\ - \text{sinon } y = \sigma(j) \text{ avec } j \text{ défini par} \\ \qquad \qquad \qquad j = \max \{ j, j < i, \sigma(j) < \sigma(i) \}. \end{array} \right.$$

Exemple 2.12.- Pour  $\sigma = 59723108614$ , il vient

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 10 \\ f(1) & f(2) & \dots & f(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 2.13. - L'application  $\gamma : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{F}_n$  définie par (2.9) est une bijection entre les permutations  $\mathfrak{S}_n$  et les fonctions sous-excédantes  $\mathfrak{F}_n$ .

La bijection réciproque est définie en utilisant la notion commode de forêt d'arbres croissants représentant une fonction sous-excédante.

La notion d'arbre se définit de manière récursive analogue à celle d'arbre binaire. Un arbre  $t = (r; \{t_1, \dots, t_k\})$  sur un ensemble (de sommets)  $E \neq \emptyset$  est la donnée d'un élément distingué  $r$  (la racine de l'arbre) et d'un ensemble ( $k \geq 0$ ) d'arbres  $t_1, \dots, t_k$  sur des ensembles de sommets  $E_1, \dots, E_k$  formant une partition de  $E \setminus \{r\}$ . On définirait de manière analogue les notions de sous-arbre, fils, feuille, hauteur. Une forêt d'arbres est un ensemble d'arbres. Un arbre ou une forêt d'arbres peut se représenter par un dessin (voir figure 2), une fois que l'on s'est donné un ordre entre les fils de chaque sommet. Remarquons enfin qu'un "arbre binaire" n'est pas un cas particulier d'arbre.

Le nombre de fils d'un sommet s'appelle le degré de ce sommet. Un arbre 1-2 est un arbre tel que tout sommet a un degré  $\leq 2$  (0, 1 ou 2 fils).

Un arbre (resp. forêt d'arbres) croissant est un arbre sur  $E = \mathbb{N}$  tel que tout sommet qui n'est pas une feuille (degré 0) est plus petit que ses fils.

Les forêts d'arbres croissants sur  $[n]$  sont en bijection avec les arbres croissants sur  $[0, n]$  : il suffit "d'ajouter" la racine 0 à la forêt, les fils de 0 étant les racines des arbres composant la forêt (voir figure 2).

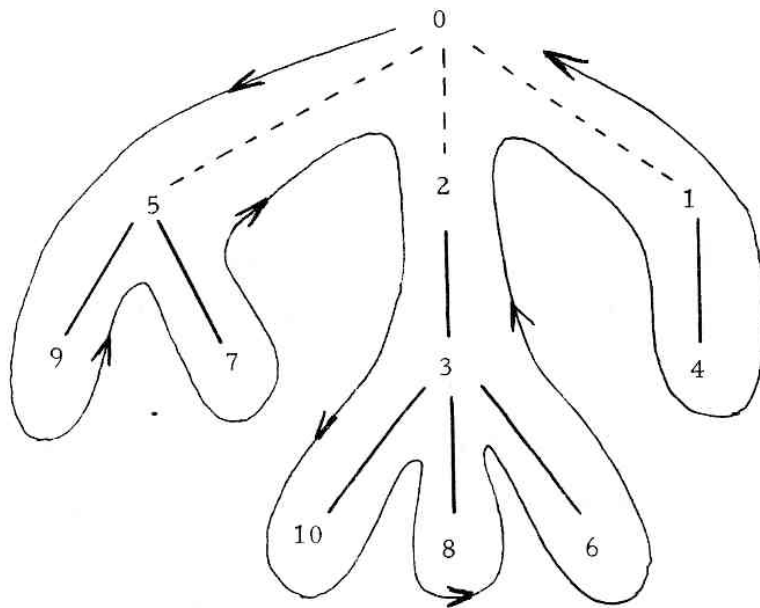


Figure 2 : Une forêt d'arbres croissants sur  $\{1, 2, \dots, 10\}$

Maintenant si  $f \in \mathfrak{F}_n$ , nous associons l'arbre croissant  $t$  sur  $[0, n]$  par la condition suivante :

(2.10) Pour  $x \in [0, n-1]$ , les fils de  $x$  sont les éléments  $y \in [n]$  (s'il en existe) tels que  $f(y) = x$ .

Si  $t$  est "dessiné" de façon que les fils de tout sommet vont en décroissant en allant de gauche à droite, on associe alors un ordre sur les sommets de  $t$ , défini schématiquement sur la figure 2 en suivant la ligne partant de la racine 0 selon le sens des flèches. Cet ordre est très classique en Informatique. Il est appelé ordre préfixe (voir Knuth [41]).

Le mot  $\sigma$  obtenu en écrivant de gauche à droite les sommets  $\neq 0$  de  $t$  ordonnés selon l'ordre préfixe est alors une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . On a en fait la relation :

$$(2.11) \quad \sigma = \eta^{-1}(f).$$

Les principales propriétés élémentaires de la bijection  $\eta : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$  sont les suivantes :



PROPOSITION 2.14. - Soient  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $f = \eta(\sigma) \in \mathfrak{F}_n$  définie par (2.9) et  $t$  l'arbre croissant associé par (2.10).

(i) Les éléments saillants de  $\sigma$  sont les fils de la racine 0 (ou racines des arbres de la forêt  $\varphi$  associée à  $t$ ).

(ii) Pour  $x \in [n]$ ,  $x$  est une feuille ssi  $x$  est soit une descente de  $\sigma$ , soit  $x = \sigma(n)$ .

(iii) Si  $x \in [n]$  est une montée de  $\sigma$ , alors les fils de  $x$  sont les éléments saillants du mot  $\rho(x)$  (non vide) de la  $x$ -factorisation (définition 2.8).

(iv) La forêt associée à  $\rho(x)$  est la forêt formée par les sous-arbres de  $t$  ayant pour racines les fils de  $x$ .

Remarquons tout de suite que les forêts d'arbres croissants sur  $[m]$  dont tout sommet a un degré pair sont dénombrées par le nombre d'Euler  $E_m$  (voir section 3.2), celles sur  $[2n+1]$  dont l'ensemble des feuilles est exactement l'ensemble des nombres impairs  $\{1, 3, \dots, 2n+1\}$  étant dénombrées par le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  (section 4.3). Enfin signalons que la notion de hauteur d'un sommet dans les forêts d'arbres dénombrées par  $E_m$  jouera un rôle crucial pour l'une des interprétations combinatoires des fonctions elliptiques de Jacobi.

## 2.6. - Permutations et chemins valués

Nous terminons enfin ce paragraphe par une bijection entre les permutations et certains "chemins valués" qui sera fondamentale pour les interprétations des développements en fractions continuées (voir §.6).

DÉFINITION 2.15. - Une fonction de Motzkin est une application  $\gamma : [n] \rightarrow [n]$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$(i) \quad \gamma(1) = \gamma(n) = 1,$$

$$(ii) \quad |\gamma(i+1) - \gamma(i)| \leq 1 \text{ pour } 1 \leq i < n.$$

La donnée d'une telle fonction revient à celle d'un "chemin", appelé ici chemin de Motzkin, c'est-à-dire d'une suite de points  $\{(i, \gamma(i)) ; i \in [n]\}$  du "plan"  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Le chemin "va" du point  $(1, 1)$  au point  $(n, 1)$ , avec trois types de

"pas élémentaires" : Nord-Est (resp. Est ou palier, resp. Sud-Est) correspondant à  $\gamma(i+1) = \gamma(i) + 1$  (resp.  $\gamma(i+1) = \gamma(i)$ , resp.  $\gamma(i+1) = \gamma(i) - 1$ ).

Exemple 2.16. - La fonction de Motzkin  $\gamma = \gamma(1) \dots \gamma(9) = 122233211$  et son chemin associé sont schématisés par la figure 3.

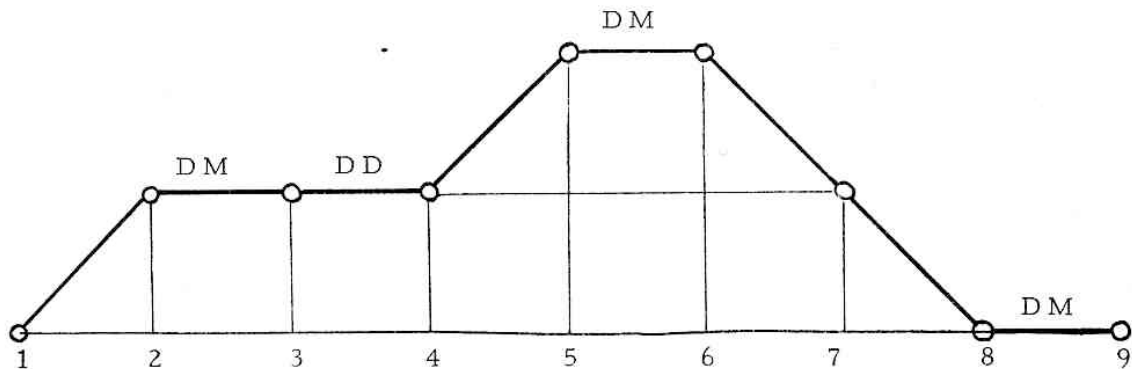


Figure 3 : Un chemin de Motzkin "coloré"

La terminologie provient du fait que le nombre de telles fonctions sur  $[n]$  est le nombre de Motzkin  $M_n$ , de série génératrice  $\sum_{n \geq 0} M_n t^n = \frac{1+t-\sqrt{1-2t+3t^2}}{2t}$ .

Remarque 2.17. - Si l'on interdit les paliers  $\gamma(i+1) = \gamma(i)$ , on a alors une fonction de Dyck  $\gamma$ . Le chemin associé est appelé chemin de Dyck. La fonction  $\gamma : [2n+1] \rightarrow [2n+1]$  est aussi codé par le mot  $w = w_1 \dots w_{2n}$  avec  $w_i = x$  (resp.  $\bar{x}$ ) si  $\gamma(i+1) = \gamma(i) + 1$  (pas Nord-Est) (resp.  $\gamma(i+1) = \gamma(i) - 1$  (pas Sud-Est)).

Un tel mot est classiquement appelé mot de Dyck en théorie des langages et automates. Le nombre de tels mots de longueur  $2n$  (ou fonctions de Dyck sur  $[2n+1]$ ) est le célèbre nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  de série génératrice

$$\sum_{n \geq 0} C_n t^n = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}.$$

DÉFINITION 2.18. - Une fonction de Motzkin colorée  $\gamma_c$  est la donnée d'une fonction de Motzkin  $\gamma : [n] \rightarrow [n]$  et d'un "coloriage" en deux couleurs des paliers ( $\gamma(i+1) = \gamma(i)$ ) de  $\gamma$ .

Ces deux couleurs seront notées DM (double montée) et DD (double descente) (et non bleu, vert, ou rouge pour des raisons qui apparaîtront plus loin).

Remarque 2.19. - Le nombre de telles fonctions  $\gamma_c$  est à nouveau le nombre de Catalan  $C_n$ .

Nous en venons alors à la proposition principale de cette section :

PROPOSITION 2.20. - Soit  $T_n$  l'ensemble des couples  $(\gamma_c, f)$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i)  $\gamma_c$  est une fonction de Motzkin colorée (définitions 2.15 et 2.18).  
 (ii)  $f : [n] \rightarrow [n]$  est une application dominée par  $\gamma$ , c'est-à-dire que  $f(i) \leq \gamma(i)$  pour tout  $i \in [n]$ .

Alors il existe une bijection  $\theta$  entre  $T_n$  et les permutations  $\mathfrak{S}_n$  (voir construction ci-dessous) vérifiant la condition :

$$(2.12) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } x \in [n], x \text{ est un pic (resp. creux, resp. double montée, resp.} \\ \text{double descente) de la permutation } \sigma = \theta(\gamma_c, f) \text{ ssi : soit } x = n, \\ \text{soit } x \neq n \text{ et } \gamma(x+1) > \gamma(x) \text{ (resp. } \gamma(x+1) < \gamma(x), \text{ resp. } \gamma(x+1) = \gamma(x) \\ \text{avec palier coloré DM, resp. } \gamma(x+1) = \gamma(x) \text{ avec palier coloré DD).} \end{array} \right.$$

Remarque 2.21. - Nous verrons au § 6 que le couple  $(\gamma_c, f)$  peut aussi être considéré comme un "chemin valué", c'est-à-dire un chemin de Motzkin dans lequel chaque pas élémentaire est muni d'une "valuation", c'est-à-dire d'un entier ne dépendant que de la hauteur  $\gamma(i)$  du pas et de la nature du pas (Nord-Est, Est ou Sud-Est).

Nous décrivons maintenant schématiquement la bijection  $\theta$  sur un exemple.

Soit  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  la fonction de Motzkin de l'exemple 2.16 et  $\gamma_c$  définie par les couleurs suivantes (voir figure 3) :

- DM pour les paliers correspondant à  $x = 2, 5, 8$  ( $\gamma(x+1) = \gamma(x)$ ),
- DD pour le palier correspondant à  $x = 3$ .

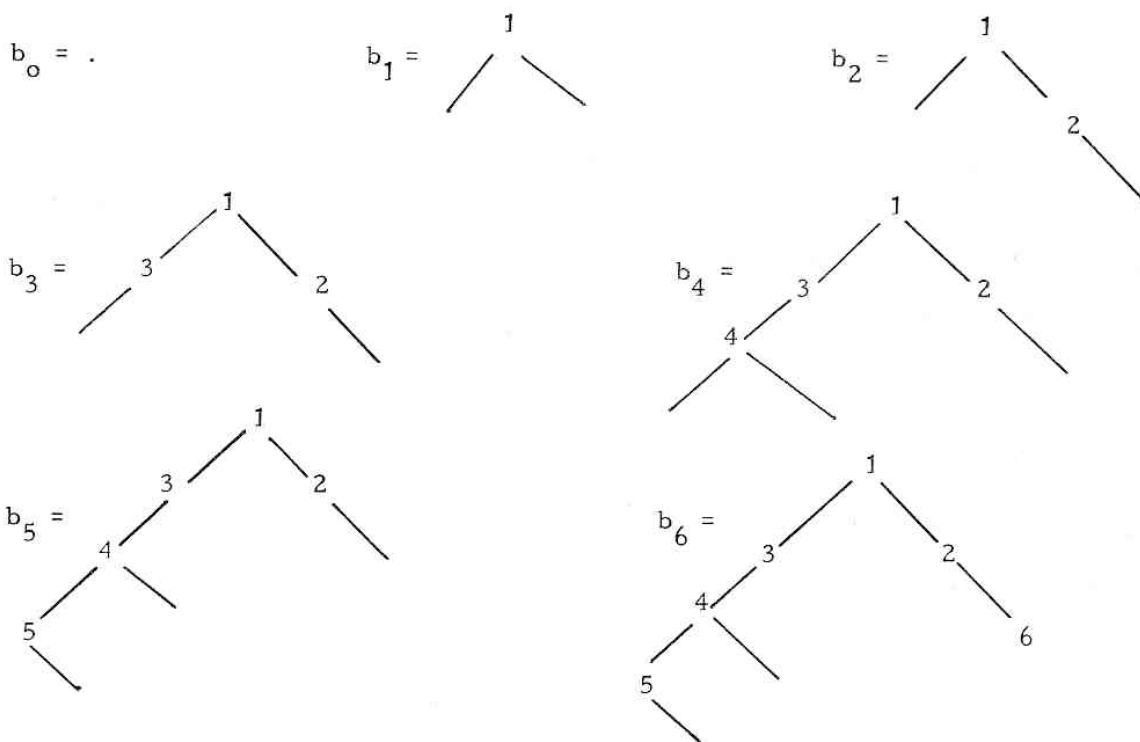
Enfin soit  $f : [n] \rightarrow [n]$  la fonction suivante dominée par  $\gamma$  :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On construit une suite d'arbres binaires  $b_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , ayant comme sommets les entiers  $1, \dots, i$ , et certains autres qui sont des feuilles appelées "feuilles libres". L'arbre  $b_0$  est l'arbre binaire formé d'un seul sommet, ce sommet étant une feuille libre. Pour  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $b_i$  est obtenu à partir de l'arbre binaire  $b_{i-1}$  en "plaçant" le sommet  $i$  sur l'une des feuilles libres de  $b_{i-1}$ . Ces feuilles sont numérotées en ordre symétrique (c'est-à-dire sur le dessin de gauche à droite) de 1 à  $\gamma(i)$  (on vérifiera par récurrence que le nombre de feuilles libres de  $b_{i-1}$  est  $\gamma(i)$ ). Le sommet  $i$  est alors "placé" sur la feuille vide numérotée  $f(i)$ .

Ensuite si  $i \neq n$  et  $\gamma(i) < \gamma(i+1)$  (resp.  $\gamma(i+1) = \gamma(i)$  avec coloration DM, resp.  $\gamma(i+1) = \gamma(i)$  avec coloration DD) on "rajoute" alors deux fils au sommet  $i$  (resp. un fils droit, resp. un fils gauche). Ces nouveaux sommets possibles étant considérés comme des feuilles libres.

Exemple 2.22. - Pour le couple  $(\gamma_c, f)$  considéré ici, la suite  $b_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , est schématisée par la figure 4.



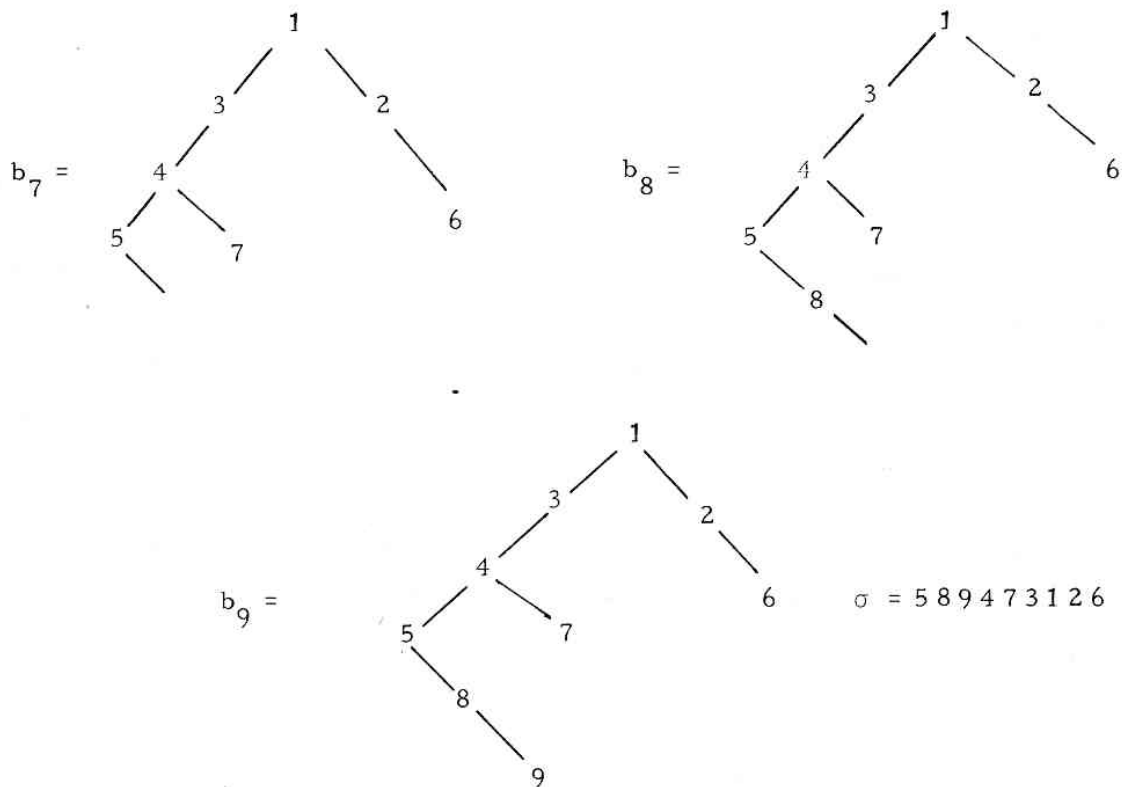


Figure 4 : Construction de  $\sigma = \theta(\gamma_c, f)$

On vérifie que  $b_n \in \mathfrak{T}_n$ , c'est-à-dire que  $b_n$  n'a plus de feuilles libres. On définit alors la permutation :

$$(2.13) \quad \sigma = \theta(\gamma_c, f) \text{ est la projection } \pi(b_n) \text{ de l'ordre binaire } b_n.$$

Par exemple ici  $\sigma = 589473126$ .

L'application  $\theta : \mathfrak{T}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  est en fait une bijection. D'après la propriété (i) de la proposition 2.11, elle vérifie la condition (2.12).

La bijection réciproque  $\theta^{-1}$  est construite de la façon suivante.

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . L'application  $\gamma$  est définie par la condition :

$$(2.14) \left\{ \begin{array}{ll} - \gamma(1) = 1 & \\ - \gamma(i+1) = \gamma(i) - 1 & \text{si } i \in P(\sigma), \\ \quad = \gamma(i) & \text{si } i \in DM(\sigma) \cup DD(\sigma), \\ \quad = \gamma(i) + 1 & \text{si } i \in Q(\sigma). \end{array} \right.$$

On prouve alors que  $\gamma(n) = 1$  et  $\gamma(i) \geq 1$  pour tout  $i \geq 1$ , c'est-à-dire que  $\gamma$  est une fonction de Motzkin. Les couleurs sur les paliers sont déterminées par la distinction entre les doubles montées  $DM(\sigma)$  et les doubles descentes  $DD(\sigma)$ . Il reste maintenant à définir directement  $f$  à partir de  $\sigma$ . Pour ceci nous introduisons la notion suivante :

**DÉFINITION 2.23.** - Soient  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $x \in [n]$ . Il existe une et une seule factorisation du mot  $\sigma$ , appelée la x-factorisation totale de  $\sigma$ , vérifiant les trois conditions :

- (i)  $\sigma = u_1 v_1 \dots u_k v_k u_{k+1}$ ,  $k \geq 1$ ,
- (ii) les mots  $v_1, \dots, v_k$  de  $\mathfrak{S}$  sont non vides et chacune de leurs lettres est  $\geq x$ ,
- (iii) les mots  $u_1, \dots, u_{k+1}$  de  $\mathfrak{S}$  sont non vides (sauf éventuellement  $u_1$  et  $u_{k+1}$ ) et chacune de leurs lettres est  $< x$ .

Alors  $\theta^{-1}(\sigma) = (\gamma_c, f)$ , avec  $f$  définie par la condition :

$$(2.15) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } i \in [n], f(i) = j \text{ où } j \text{ est l'unique indice } 1 \leq j \leq k, \text{ tel que } i \\ \text{soit une lettre du mot } v_j \text{ dans la } i\text{-factorisation totale de } \sigma. \end{array} \right.$$

**Remarque 2.24.** - (i) Ce mot  $v_j$  est le mot  $\lambda(i) i \rho(i)$  de la  $i$ -factorisation de  $\sigma$ .

(ii) En fait  $k = \gamma(i)$ .

**Exemple 2.25.** - Pour  $x = 7$  la  $x$ -factorisation totale de  $\sigma = 589473126$  est  $\sigma = u_1 v_1 u_2 v_2 u_3$  avec  $u_1 = 5$ ,  $v_1 = 89$ ,  $u_2 = 4$ ,  $v_2 = 7$ ,  $u_3 = 3126$ . Ici  $\gamma(7) = 2$  et  $i(7) = 2$ .

### Références bibliographiques

On trouvera un exposé de la combinatoire "classique" des permutations dans Knuth [42] (chapitre 5.1) ou Comtet [9] (chapitre 6). Pour une introduction plus détaillée à la combinatoire "bijective" voir Viennot [72]. La bijection entre permutations et arbres binaires croissants provient de Foata, Schützenberger [27] (en fait de la deuxième partie de cet article, la première partie seulement étant publié). Cette bijection est reprise et explicitée par Françon [31], Viennot [66] et Kundu [45]. La bijection entre permutations et forêts d'arbres croissants est décrite sous une forme différente, mais équivalente, par Burge [6] en rapport avec des méthodes de tris en informatique. Elle est étudiée systématiquement dans Françon [31] et Viennot [66].

On y trouvera en fait l'équivalence des deux bijections (permutations et arbres binaires croissants d'une part, permutations et forêts d'arbres croissants d'autre part) en appliquant la transformation dite "naturelle" par Knuth [41] (chapitre 2.3, p. 333) entre arbres binaires et forêts d'arbres. La bijection  $\eta : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$  décrite en 2.5 a été reprise par Foata [30] sous le nom de V-code. La bijection  $\theta : \mathfrak{T}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$  définie en 2.6 provient de Françon, Viennot [33]. La description adoptée est la même que Flajolet [21].

### § 3. - Equations différentielles et interprétations combinatoires des nombres d'Euler

Nous donnons trois interprétations des nombres d'Euler. Chacune correspond à une relation de récurrence, équivalente à un système d'équations différentielles.

#### 3.1. - Permutations alternantes

Cette interprétation repose sur le système différentiel suivant satisfait par les fonctions  $y = \operatorname{tg} t$  et  $z = 1/\cos t$ ,

$$(3.1) \quad \begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ z' = y z, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

En notant  $y = \sum_{m \geq 0} T_m \frac{t^m}{m!}$  et  $z = \sum_{m \geq 0} S_m \frac{t^m}{m!}$ , le système (3.1) équivaut aux relations de récurrence suivantes :

$$(3.2) \quad \begin{cases} T_{2n+1} = \sum_i \binom{2n}{2i+1} T_{2i+1} T_{2n-2i-1}, & T_{2n} = 0 \quad (n \geq 0), \quad T_1 = 1, \\ S_{2n} = \sum_i \binom{2n-1}{2i+1} T_{2i+1} S_{2n-2i-2}, & S_{2n+1} = 0 \quad (n \geq 0), \quad S_0 = 1. \end{cases}$$

Ces relations de récurrence sont interprétées combinatoirement par la notion suivante :

**DÉFINITION 3.1.** - Une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  est dite alternante ssi l'ensemble des indices  $i$  des descentes  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$  est exactement l'ensemble des entiers impairs  $1 \leq i < m$ . On dit encore que la forme  $w = - + - + \dots$  de  $\sigma$  est alternante.

Exemple 3.2. -  $\sigma = 7 \ 6 \ 9 \ 1 \ 4 \ 3 \ 8 \ 2 \ 5$ .

**PROPOSITION 3.3.** - Le nombre de permutations alternantes de  $\mathfrak{S}_m$ ,  $m \geq 1$ , est le nombre d'Euler  $E_m$  (ou encore nombre tangent pour  $m$  impair et nombre sécant pour  $m$  pair).

Nous démontrons cette proposition. Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_m$ . Nous factorisons le mot  $\sigma$  en  $\sigma = u1v$  avec  $x=1$  la plus petite lettre,  $u$  et  $v$  mots de  $\mathfrak{S}$ . Pour tout mot  $w \in \mathfrak{S}$ , on peut définir la permutation réduite  $\bar{w}$  par le procédé suivant. Les lettres de  $w$  sont ordonnées  $w_1 < w_2 < \dots < w_k$ . Le mot  $\bar{w}$  est alors obtenu en remplaçant dans le mot  $w$  chaque lettre  $w_i$  par la lettre  $i$ . Le mot  $w$  peut être reconstitué par la donnée du mot réduit  $\bar{w} \in \mathfrak{S}_k$  et de l'ensemble de ses lettres.

Revenant à la permutation  $\sigma = u1v$ , celle-ci est alternante ssi  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  le sont.

Il y a en fait une bijection entre les permutations alternantes  $\sigma = u1v$  de  $\mathfrak{S}_m$ ,  $m = 2n+1$  impair (resp.  $m = 2n$  pair) et les triplets  $(\bar{u}, \bar{v}, I)$  dans lesquels  $\bar{u}$  est une permutation alternante sur un nombre impair  $2i+1$  de lettres,  $\bar{v}$  est une permutation alternante sur un nombre impair (resp. pair)  $m-2i-2$  de lettres, et  $I$  est une partie de  $[2, m]$  ayant  $2i+1$  éléments.



Cette bijection démontre que les nombres de permutations alternantes sur  $m = 2n+1$  et  $m = 2n$  satisfont la récurrence (3.2).  $\square$

Nous interprétons maintenant la proposition 3.3 en utilisant la bijection  $\theta$  entre chemins valués et permutations décrites en 2.6.

Pour  $m = 2n+1$  impair, une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  est alternante ssi on a  $DM(\sigma) = DD(\sigma) = \emptyset$ . En appliquant la bijection  $\theta$ , on obtient alors l'identité :

$$(3.3) \quad E_{2n+1} = \sum_{\gamma} \left( \prod_{i=1}^{2n+1} \gamma(i) \right),$$

la sommation est étendue aux  $C_n$  (nombre de Catalan) fonctions de Dyck sur  $[2n+1]$  (définitions 2.16 et 2.17).

Pour  $m = 2n$  pair,  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  est alternante ssi  $DM(\sigma) = \emptyset$  et  $DD(\sigma) = \{\sigma(n)\}$ . Il est plus commode d'utiliser l'interprétation suivante :  $E_{2n}$  est le nombre de permutations alternantes  $\sigma$  sur  $2n+1$  telles que  $\sigma(2n+1) = 2n+1$ . C'est aussi le nombre de couple  $(\gamma, f) = \theta^{-1}(\sigma)$  de  $T_{2n+1}$  (voir section 2.6) tels que  $\gamma$  est une fonction de Dyck sur  $[2n+1]$  et  $f : [2n+1] \rightarrow [2n+1]$ , fonction dominée par  $\gamma$ , vérifie la condition supplémentaire :

$$(3.4) \quad \text{Pour } i \in [2n+1] \text{ tel que } \gamma(i+1) > \gamma(i), \text{ alors } 1 \leq f(i) \leq \gamma(i) - 1.$$

On déduit alors l'identité suivante analogue à (3.3) :

$$(3.5) \quad E_{2n} = \sum_{\gamma} \left( \prod_{i=1}^{2n} \inf(\gamma(i), \gamma(i+1)) \right),$$

la sommation est étendue aux  $C_n$  fonctions de Dyck sur  $[2n+1]$ .

Remarque 3.4. - Le produit du deuxième membre de (3.5) peut être considéré comme le produit des "hauteurs" des "arêtes" du chemin de Dyck associé à  $\gamma$  (voir figure 5 ci-dessous). Entre (3.3) et (3.5) il y a une sorte de dualité (passage des hauteurs de sommets aux hauteurs d'arêtes), que nous retrouverons au paragraphe 7.

Remarque 3.5. - Nous verrons au paragraphe 6 que les relations (3.3) et (3.5) constituent la démonstration combinatoire des développements en fractions continues des transformées de Laplace des fonctions  $y = \operatorname{tg} t$  et  $z = 1/\cos t$ .

Exemple 3.6. - Pour  $2n+1 = 7$ , il y a  $C_3 = 5$  chemins de Dyck, schématisés par la figure 5.

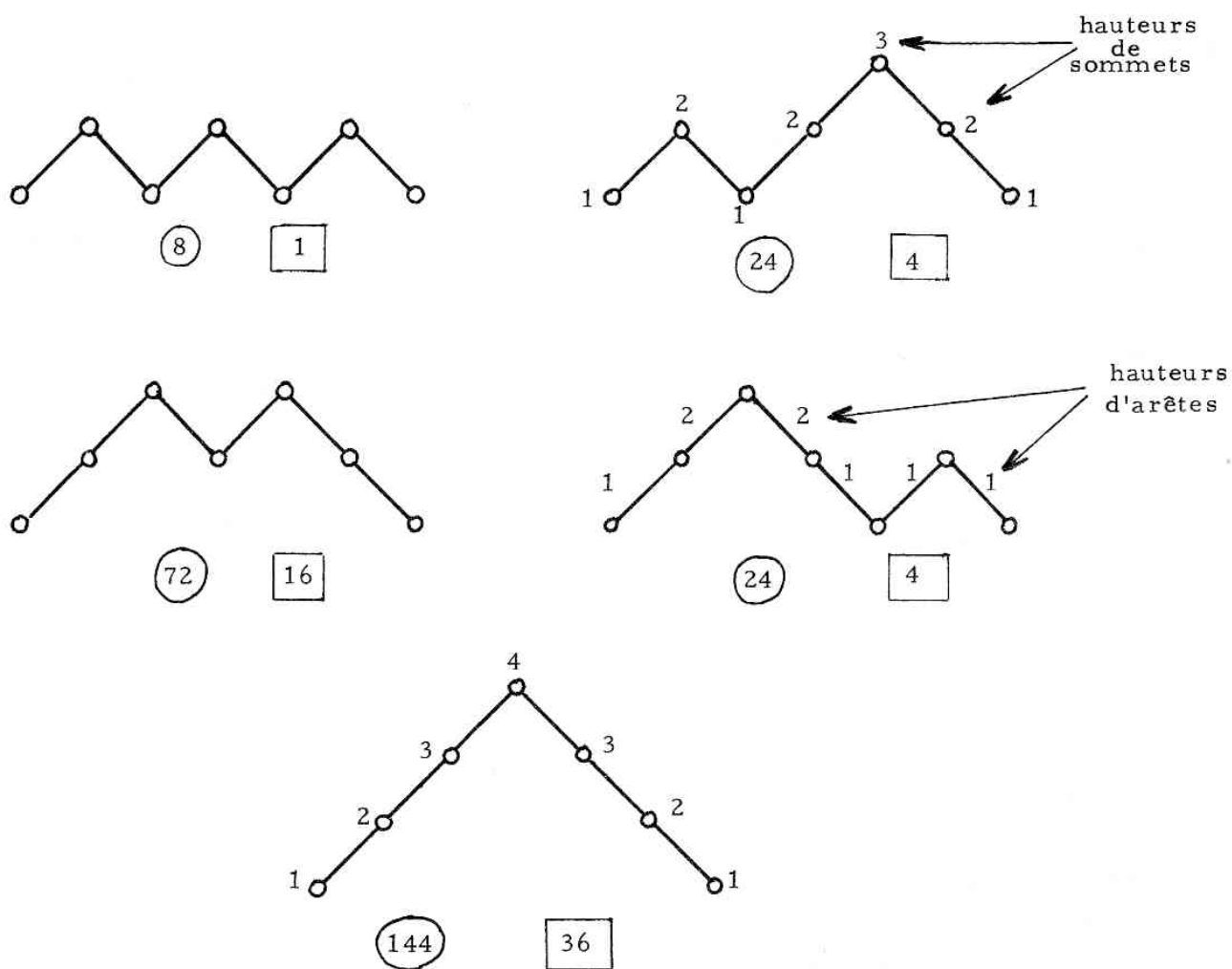


Figure 5

Pour chaque chemin de Dyck  $\gamma$ , le nombre entouré d'un cercle (resp. carré) est le produit des "hauteurs de sommets" (resp. "hauteurs d'arêtes") du chemin, c'est-à-dire le nombre de permutations alternantes  $\theta(\gamma, f)$  associées à  $\gamma$ .

On obtient ici :

$$E_7 = 8 + 24 + 24 + 72 + 144 = 272 ,$$

$$E_6 = 1 + 4 + 4 + 16 + 36 = 61 .$$

### 3.2. - Permutations de Jacobi

Cette interprétation découle du système différentiel suivant satisfait par  $y = \operatorname{tg} t$  et  $z = 1/\cos t$ ,

$$(3.6) \quad \begin{cases} y' = z^2 \\ z' = yz, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1. \end{cases}$$

En notant  $y = \sum_{m \geq 0} T_m \frac{t^m}{m!}$  et  $z = \sum_{m \geq 0} S_m \frac{t^m}{m!}$  le système (3.1) équivaut aux relations de récurrence suivantes :

$$(3.7) \quad \begin{cases} T_{2n+1} = \sum_i \binom{2n}{2i} S_{2i} S_{2n-2i}, \quad T_{2n} = 0 \quad (n \geq 0), \quad T_1 = 1, \\ S_{2n} = \sum_i \binom{2n-1}{2i} S_{2i} T_{2n-1-2i}, \quad S_{2n+1} = 0 \quad (n \geq 0), \quad S_0 = 1. \end{cases}$$

**DÉFINITION 3.7.** - Une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  est dite permutation de Jacobi si pour tout  $x \in [m]$  le mot  $\rho(x)$  de la  $x$ -factorisation de  $\sigma$  (voir définition 2.8) a une longueur paire.

**Exemple 3.8.** - La permutation  $\sigma = 728514963$  est de Jacobi. Les mots  $\rho(x)$ ,  $1 \leq x \leq 9$ , sont explicités dans le tableau suivant :

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho(x)$	4963	85	e	96	e	e	e	e	e
$ \rho(x) $	4	2	0	2	0	0	0	0	0

PROPOSITION 3.9. - Le nombre de permutations de Jacobi de  $\mathfrak{S}_m$ ,  $m \geq 1$ , est le nombre d'Euler  $E_m$ .

La démonstration est tout à fait analogue à celle relative aux permutations alternantes de la proposition 3.3 interprétant le système (3.1). Elle repose sur le lemme suivant :

LEMME 3.10. - Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ ,  $m \geq 1$ . Notons  $\sigma = u1v$  avec  $u$  et  $v$  mots de  $\mathfrak{S}$ . Alors  $\sigma$  est une permutation de Jacobi si et seulement si on a les deux conditions :

- (i) la longueur  $|v|$  est paire,
- (ii) les permutations réduites (voir définition après la proposition 3.3)  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  sont de Jacobi.

Comme pour les permutations alternantes, on démontre alors que les permutations de Jacobi constituent une interprétation ensembliste des récurrences (3.7).

Remarque 3.11. - La terminologie provient du fait que ces permutations sont à la base d'une interprétation combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi,  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$ , à partir du système différentiel satisfait par ces fonctions (voir le paragraphe 8).

La récurrence (3.7) peut en fait se "lire" également sur les permutations alternantes. Pour ceci nous définissons les permutations alternantes montantes, c'est-à-dire celles dont la forme est  $w = + - + - \dots$ . Les permutations alternantes introduites à la définition 3.1 seront aussi appelées alternantes descendantes. Ces deux classes de permutations, dénombrées par les nombres d'Euler  $E_m$ , sont trivialement en correspondance par la bijection "passage au complémentaire"  $\sigma \rightarrow \sigma^c$  :

$$(3.8) \text{ Pour } \sigma \in \mathfrak{S}_m, \sigma^c(i) = m+1 - \sigma(i) \text{ pour } i \in [m].$$

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ , permutation alternante descendante, on factorise  $\sigma$  sous la forme  $\sigma = umv$ . Alors pour  $m = 2n+1$  impair (resp.  $m = 2n$  pair), la permutation réduite  $\bar{u}$  est alternante descendante sur un nombre pair d'éléments,

tandis que  $\bar{v}$  est alternante montante sur un nombre pair (resp. impair) d'éléments. Par passage au complémentaire pour  $\bar{v}$ , on a bien une interprétation combinatoire de la relation (3.7). On peut donc se demander si les permutations de Jacobi constituent une interprétation vraiment "différente" des alternantes.

Cette objection est sans fondements. En effet, même s'il existe une bijection triviale entre les permutations alternantes descendantes et montantes, l'interprétation de la récurrence (3.7) est faite avec deux classes différentes d'objets combinatoires pour le même nombre (pour le nombre tangent  $E_{2n+1}$  ainsi que pour le nombre sécant  $E_{2n}$ ). Ceci n'est pas le cas pour les permutations de Jacobi. L'utilisation de la bijection "passage au complémentaire" va se répéter par récursivité, et on arrive à une interprétation combinatoire complètement différente. D'ailleurs cette application répétée de ce "passage au complémentaire" conduit précisément à une bijection entre les permutations alternantes et les permutations de Jacobi (voir section 3.4 ci-dessous).

Nous terminons cette discussion (en espérant dissiper les doutes éventuels du lecteur) par les deux faits suivants :

D'une part, les permutations de Jacobi conduisent "naturellement" à une interprétation combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  à partir du système différentiel (8.3) satisfait par ces fonctions (voir paragraphe 8), système se réduisant (au signe près) à (3.6). Ceci n'est pas le cas pour les permutations alternantes (ou du moins l'interprétation n'a pas été trouvée, bien qu'il en existe une en termes de permutations alternantes, mais relative au développement en fraction continuée des transformées de Laplace des fonctions  $tg t$  et  $1/\cos t$ ).

D'autre part, les interprétations combinatoires des systèmes différentiels (3.1) (permutations alternantes) et (3.6) (permutations de Jacobi), comme d'ailleurs celle de l'équation (3.10) (permutations d'André) ci-dessous et du système (8.3) sont des cas particuliers d'une théorie beaucoup plus générale : celle des "histoires" développée dans Viennot [71], en liaison avec les équations différentielles en régime forcé de l'automatique non linéaire (voir l'introduction) et la théorie de Fliess (voir par exemple Fliess [24], [25]). Dans cette théorie, les permutations de Jacobi sont bien l'interprétation "naturelle" du système (3.6), et non les permutations alternantes (montantes ou descendantes).

Nous utilisons maintenant la bijection  $\eta : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$  définie par (2.9) pour retraduire en termes de fonctions sous-excédantes (ou forêts d'arbres croissants) l'interprétation combinatoire des nombres d'Euler donnée en terme de permutations de Jacobi.

**PROPOSITION 3.12.** - Le nombre d'Euler  $E_m$ ,  $m \geq 1$ , est le nombre de fonctions sous-excédantes  $f \in \mathfrak{F}_m$  vérifiant la condition suivante :

$$(3.9) \quad \text{Pour tout } x \in [n], \text{ le nombre de } y \in [n] \text{ tel que } f(y) = x, \text{ est pair.}$$

En effet, il est clair que la propriété (iv) de la proposition 2.14 permet d'affirmer que  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est de Jacobi si et seulement si  $\eta(\sigma)$  vérifie la condition (3.9).

D'une manière équivalente, on peut aussi dire que  $E_m$  est le nombre de forêts d'arbres croissants sur  $[m]$  telles que tout sommet a un degré (nombre de fils) pair.

Remarque 3.13. - Nous avons ici un exemple de deux interprétations combinatoires d'une suite de nombre  $E_m$ ,  $m \geq 1$ , reliées par une bijection. La récurrence (3.7) traduit "naturellement" la croissance de l'un, c'est-à-dire comment la construire en enlevant un élément (le plus petit) à partir d'objets similaires. La croissance du deuxième est lié à une toute autre récurrence, correspondant au passage arbres  $\rightarrow$  forêts en "enlevant" la racine. Ici la théorie du composé partitionnel abélien de Foata [28] permettrait d'exprimer cette récurrence.

Remarque 3.14. - L'interprétation combinatoire de la proposition 3.12 est utilisée par Pansiot [53] pour un problème lié au polynôme de Tutte du graphe complet  $K_n$  (voir les références bibliographiques à la fin de la section et le problème ouvert n°10).

### 3.3. - Permutations d'André

Nous interprétons maintenant l'équation différentielle satisfaite par la série génératrice exponentielle des nombres d'Euler  $E_m$ ,  $m \geq 0$ , sans distinction de parité comme précédemment, c'est-à-dire la fonction  $f(t) = \operatorname{tg} t + \frac{1}{\cos t}$ .

Cette fonction est l'unique solution de l'équation suivante,

$$(3.10) \quad 2 f'(t) = 1 + f^2(t), \quad f(0) = 1 .$$

Cette équation équivaut à la récurrence

$$(3.11) \quad 2 E_{m+1} = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m}{i} E_i E_{m-i}, \quad E_0 = 1 .$$

Une interprétation combinatoire ("naturelle" au sens de [71]) est donnée par :

**PROPOSITION 3.15.** - Le nombre d'Euler  $E_m$ ,  $m \geq 0$ , est égal au nombre d'arbres 1-2 croissants sur  $[m]$  (c'est-à-dire les arbres croissants de la section 2.5 tel que chaque sommet admet 0, 1 ou 2 fils).

A nouveau le raisonnement est analogue à celui des propositions 3.3 (permutations alternantes) et 3.9 (permutations de Jacobi). En enlevant la racine  $x=1$  d'un arbre 1-2 croissant sur  $[m]$ , on obtient l'arbre vide si  $m=1$  (considéré ici comme arbre 1-2 croissant), un arbre 1-2 croissant sur  $[2, m]$  si la racine n'a qu'un fils, un ensemble (non ordonné) de deux arbres 1-2 croissants ayant pour sommets deux ensembles formant une partition de  $[2, m]$  si cette racine à deux fils.

La seule nouveauté ici est la présence du facteur 2 correspondant au fait que le produit  $E_i E_{m-i}$  du deuxième membre de (3.11) interprète une paire (ordonnée) de deux arbres 1-2 croissants (l'un étant vide dans le cas d'une racine ayant un seul fils), alors qu'il s'agit ici de paire non ordonnée.

Les deux cas : racine ayant un ou deux fils, sont traités en même temps. La compréhension est peut-être améliorée en distinguant bien ces deux cas. Ceci revient à poser tout simplement  $g(t) = 1 + f(t)$ , satisfaisant alors l'équation différentielle :

$$(3.12) \quad g'(t) = 1 + g(t) + \frac{1}{2} g^2(t), \quad g(0) = 0 .$$

En fait les deux équations (3.10) et (3.12) conduisent ici (et aussi pour la théorie générale des histoires [71]) à la même interprétation combinatoire. En termes d'histoires générales, nous sommes en fait en présence d'un exemple

de la notion de "fermeture d'une histoire" (voir [71]). Le lecteur sera peut-être surpris d'apprendre que la bijection  $\theta$  entre permutations et chemins valués de la section 2.6 en est un autre exemple. Grosso modo, cette bijection correspond à la "fermeture" de la bijection "table d'inversion" de la section 2.3.

Grâce à la bijection  $\delta : \mathfrak{S}_m \longrightarrow \mathfrak{I}_m$  définie en 2.4, nous "traduisons" maintenant en terme de permutations l'interprétation de la proposition 3.15.

Pour  $x \in [m]$ ,  $m \geq 1$ , soit  $I_x$  l'involution agissant sur les arbres binaires croissants  $\mathfrak{I}_m$  et consistant à échanger les sous-arbres gauches et droits du sommet  $x$ . Ces involutions commutent deux à deux et engendrent un groupe  $G_m$  (en fait isomorphe à un produit direct de  $m-1$  groupes à 2 éléments) opérant sur  $\mathfrak{I}_m$ .

Les orbites sont en bijection avec les arbres binaires 1-2 croissants sur  $[m]$  (intuitivement un arbre binaire 1-2 croissant est un arbre binaire croissant dans lequel on ne distingue pas les notions de fils gauche et fils droit).

Un système de représentants de ces orbites donnera par la projection  $\pi : \mathfrak{I}_m \longrightarrow \mathfrak{S}_m$  (voir section 2.4) une classe de permutations dénombrées par le nombre d'Euler  $E_m$ .

Par exemple, on peut prendre les arbres binaires croissants  $b \in \mathfrak{I}_m$  vérifiant les deux conditions suivantes :

(3.13) si  $x \in [m]$  est point simple de  $b$ , l'unique fils de  $x$  est fils droit.

(3.14) si  $x \in [m]$  est un point double de  $b$ , le fils droit est plus petit que le fils gauche de  $x$ .

En utilisant la proposition 2.9, nous définissons par projection la classe des permutations d'André (de première espèce), c'est-à-dire les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  sans double descente et telle que la  $x$ -factorisation  $\sigma = u\lambda(x)x\rho(x)v$  de tout creux  $x \in [m]$  vérifie la condition

(3.15)  $\min(\rho(x)) < \min(\lambda(x))$  (plus petite des lettres).



Un autre système de représentants pourrait être défini en remplaçant  $\min$  par  $\max$  (plus grande des lettres) dans (3.15). On définirait ainsi, comme dans [27], [29], les permutations d'André de seconde espèce, également dénombrées par le nombre d'Euler  $E_m$ .

### 3.4. - Bijections et nombres d'Euler

Comme nous le disions dans l'introduction, après avoir donné des interprétations combinatoires des nombres d'Euler, la deuxième étape de leur "théorie géométrique" consiste à relier entre elles ces interprétations, ainsi que d'expliquer (par des bijections) les identités remarquables satisfaites par ces nombres. Nous ne donnons dans cette section qu'un bref aperçu.

Dans la discussion suivant la remarque 3.11, nous avons donné l'idée de la construction d'une bijection entre les permutations alternantes et les permutations de Jacobi, expliquant ainsi l'équivalence des systèmes différentiels (3.1) et (3.6). Cette bijection est explicitée maintenant.

Remarquons d'abord que l'on peut étendre à tous les mots de  $\mathfrak{S}$  l'application "passage au complémentaire", définie en (3.8) pour les permutations. Pour  $w \in \mathfrak{S}$ , le mot  $w^c$  est l'unique mot ayant pour lettres les mêmes que celles de  $w$ , et pour tout mot réduit (définition après la proposition 3.3) le mot  $\overline{w^c} = (\overline{w})^c$ .

On définit alors par récursivité l'application  $\alpha : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  par les relations suivantes :

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \alpha(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{N}, \alpha(e) = e \text{ (mot vide)}, \\ - \text{pour } w \in \mathfrak{S}, \text{ notons } w = umv \text{ avec } u, v \in \mathfrak{S} \text{ et } m \text{ la plus} \\ \quad \text{petite lettre de } w, \text{ alors } \alpha(w) = (\alpha(u))^c m \alpha(v). \end{array} \right.$$

PROPOSITION 3.16. - L'application  $\alpha$  définie par (3.16) envoie bijectivement les permutations de Jacobi (définition 3.7) sur  $m$  pair (resp.  $m$  impair) sur les permutations alternantes descendantes (resp. montantes) (définition 3.1 et suite de la remarque 3.11).

Exemple 3.17. - Pour la permutation de Jacobi  $\sigma = 728514963$ , on calcule successivement

$$\begin{aligned}\alpha(7285) &= 7285, \\ \alpha(496) &= 496, \quad \alpha(4963) = 9463, \\ \alpha(\sigma) &= 582719463,\end{aligned}$$

qui est bien une permutation alternante montante.

Dans le même ordre d'idée, on peut aussi donner une bijection entre les permutations alternantes et les arbres 1-2 croissants (ou permutations d'André) interprétant ainsi combinatoirement l'équivalence du système différentiel (3.1) et de l'équation (3.10).

Soit  $\beta : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_n$  définie récursivement par la relation suivante :

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \beta(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{N}, \quad \beta(e) = e \text{ (mot vide)}, \\ - \text{pour } \sigma \in \mathfrak{S}, \text{ si la plus grande lettre } \max(\sigma) \text{ est à droite} \\ \text{(resp. à gauche) de la plus petite lettre } \min(\sigma), \text{ notons} \\ \sigma^* = \sigma \text{ (resp. } \sigma^* = \sigma^c). \text{ En factorisant } \sigma^* = umv \text{ avec} \\ m = \min(\sigma^*), \text{ alors } \beta(\sigma) = \beta(u) m \beta(v). \end{array} \right.$$

PROPOSITION 3.17. - L'application  $\beta$  définie par (3.16) envoie bijectivement les permutations alternantes (définition 3.1) sur les permutations d'André de seconde espèce (définition à la fin de 3.3).

Remarque 3.18. - Là encore, la construction de cette bijection est équivalente à l'interprétation de la récurrence (3.11) (associée aux permutations d'André) directement sur les permutations alternantes. En fait, il est plus commode de remplacer l'équation différentielle (3.10) associée à (3.11) par celle obtenue en différentiant les deux membres, soit

$$(3.18) \quad f''(t) = f(t) f'(t), \quad f(0) = f'(0) = 1,$$

équivalente à la récurrence

$$(3.19) \quad E_{m+2} = \sum_{0 \leq i \leq m} \binom{m}{i} E_i E_{m+1-i}, \quad m \geq 0, \quad E_0 = E_1 = 1.$$

Cette dernière relation peut être "lue" sur les permutations alternantes  $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+2}$  en supprimant la plus petite et la plus grande lettre de  $\sigma$ . L'interprétation "naturelle" de (3.19) est encore les permutations d'André ou arbres 1-2 croissants.

Donnons un exemple de "preuve bijective" d'une identité faisant intervenir les nombres d'Euler.

Les polynômes eulériens  $A_n(t) = \sum_{0 \leq k < n} A_{n,k} t^k$  peuvent être définis par la relation

$$(3.20) \quad \sum_{i \geq 1} i^n t^i = \frac{t A_n(t)}{(1-t)^{n+1}},$$

et satisfont l'identité

$$(3.21) \quad \begin{cases} A_{2n}(-1) = 0 \\ A_{2n+1}(-1) = (-1)^n E_{2n+1} \end{cases}.$$

On sait classiquement que  $A_{n,k}$  (le nombre eulérien) est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  ayant  $k$  montées. (On peut le démontrer directement à partir de 3.20.)

Soit  $T'_n$  l'ensemble des chemins valués  $(\gamma_c, f)$  de  $T_n$  tels que  $\gamma$  ait au moins un palier  $\gamma(i) = \gamma(i+1)$ . On définit l'involution  $\Phi : T'_n \rightarrow T'_n$  consistant à échanger les couleurs DM et DD du premier palier. Il est clair que les nombres de montées des permutations  $\theta(\gamma_c, f)$  et  $\theta(\Phi(\gamma_c, f))$  sont de parité opposée. La somme alternée  $A_n(-1)$  est donc la différence entre le nombre de permutations  $\sigma \in (T_n \setminus T'_n)$  ayant un nombre pair de montées et celles ayant un nombre impair.

Pour  $n$  pair,  $T_n = T'_n$ , tandis que pour  $n$  impair  $\theta(T_n \setminus T'_n)$  est l'ensemble des permutations alternantes. D'où la relation (3.21).

### Références bibliographiques

La "théorie combinatoire" des nombres d'Euler est née il y a plus d'un siècle avec la découverte et l'étude par le combinatoriste D. André des permutations alternantes [3], [4]. Après une éclipse à peu près totale, elle fut reprise magistralement par D. Foata et M. P. Schützenberger dans leur monographie sur les polynômes eulériens [26], puis avec l'introduction des permutations "d'André" [27], [60]. L'étude de ces permutations est poursuivie dans Foata, Strehl [29]. La preuve bijective donnée ici de l'identité (3.21) simplifie celle de [26]. La bijection entre permutations alternantes et d'André est dans [27] et reprise par Donaghey [10].

Le dénombrement des permutations alternantes est un cas particulier du dénombrement des permutations ayant une forme donnée (définie par (2.2)). Diverses formules et de nombreux articles sont consacrés à ce sujet (voir par exemple MacMahon [48], Niven [52], et ceux de Carlitz et ses élèves).

L'interprétation des permutations alternantes en termes de "chemins valués" (identités (3.3) et (3.5)) fut démontrée (analytiquement) par Rosen [57], en liaison avec le modèle Ising du ferromagnétisme (à une dimension), ainsi que Jackson [40] et Strehl [63]. Dumont donne en [14] une preuve bijective, en liaison avec une autre interprétation combinatoire des nombres tangents liée aux pistolets surjectifs du paragraphe 5. La preuve bijective adoptée ici est celle de Françon, Viennot [33].

Les permutations de Jacobi sont introduites par Viennot [67] en vue de l'étude combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi. On trouvera dans Viennot, [69], une autre bijection (que celle de la proposition 3.16) entre les permutations alternantes et celles de Jacobi. Cette bijection découle d'une correspondance entre permutations et chaînes maximales de sous-mots dans le monofde libre engendré par un alphabet à deux lettres. Comme nous l'avions souligné (remarque 3.14), la traduction des permutations de Jacobi en termes de forêts d'arbres (proposition 3.12) est cruciale pour la preuve bijective donnée par Pansiot [53] de l'identité  $E_m = K_m(-1)$  reliant les nombres d'Euler et certains polynômes  $K_m(t)$  introduit par Kreweras [43] et Gessel, Wang [73]. Ces polynômes peuvent être identifiés par  $K_m(t) = T_m(1, t)$ , en désignant par  $T_m(x, y)$  le "polynôme de Tutte" du graphe complet  $K_m$  (voir Tutte [65]).

Enfin, certaines notions ou démonstrations esquissées ici, peuvent être faites dans un cadre beaucoup plus général. D'une part, il y a le composé partitionnel abélien, modèle combinatoire pour les séries génératrices exponentielles, introduit par Foata [28]. D'autre part les interprétations combinatoires des équations différentielles de ce paragraphe, ainsi que l'étude non commutative de l'équation (3.18) par Schützenberger [60], sont des cas particuliers de la théorie des "histoires générales", commencée par Viennot [71], en liaison avec la théorie développée par Fließ et ses élèves en automatique non linéaire [24], [25], [46], les "histoires de fichiers" de l'Informatique, Françon [32], Flajolet, Françon, Vuillemin [23] et les travaux de Lenormand sur le "calcul ombraal non commutatif" (articles à venir).

#### § 4. - Matrices de Seidel des nombres d'Euler et de Genocchi

Dans ce paragraphe, nous rappelons la méthode très simple (et quelque peu oubliée) introduite par Seidel en 1877 [61] pour caractériser les nombres d'Euler et de Genocchi (et aussi de Bernoulli !). Cette méthode conduit à une interprétation combinatoire, que l'on pourrait dire "très proche" de la série génératrice. Dans le cas des nombres de Genocchi, nous introduisons les pistolets alternants et une certaine classe de permutations alternantes. Dans le cas des nombres d'Euler, on retrouve l'interprétation issue du système différentiel (3.1), c'est-à-dire les permutations alternantes.

##### 4.1. - Matrices de Seidel

DÉFINITION 4.1. - Une matrice de Seidel est une matrice (infinie)

$A = (a_{k,n})$ ,  $k, n \geq 0$ , avec coefficients dans le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , et satisfaisant la condition

$$(4.1) \quad a_{k,n} = a_{k-1,n} + a_{k-1,n+1}, \quad n \geq 0, \quad k \geq 1.$$

En somme, la condition (4.1) exprime que le terme  $a_{k,n}$  (ligne d'indice  $k \geq 1$  et colonne d'indice  $n \geq 0$ ) est la somme du terme situé juste au-dessus (Nord) et de celui situé au Nord-Est (voir par exemple les tables 2 et 3).

La donnée de la première ligne  $(a_n) = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,n}, \dots)$  détermine la matrice de Seidel  $A$ . Ses coefficients se calculent aisément par la récurrence (4.1). Nous noterons  $(b_n) = (a_{0,0}, a_{1,0}, \dots, a_{n,0}, \dots)$  la suite formée par les éléments de la première colonne. Nous avons ainsi défini une transformation sur les suites de nombres  $\varphi : (a_n) \rightarrow (b_n)$ , appelée transformation d'Euler.

Tout élément  $a_{k,n}$  d'une matrice de Seidel  $A$  peut s'exprimer en fonction de la suite  $(a_n)$  (première ligne) ou de la suite  $(b_n)$  (première colonne) par les relations

$$(4.2) \quad a_{k,n} = \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i} a_{n+i} \quad k \geq 0, n \geq 0,$$

$$(4.3) \quad a_{k,n} = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \binom{n}{i} b_{k+n-i}, \quad k \geq 0, n \geq 0.$$

La relation (4.2) permet d'établir

PROPOSITION 4.2. - Soient  $A = (a_{k,n})$  une matrice de Seidel et  
 $a(t) = \sum_{n \geq 0} a_{0,n} \frac{t^n}{n!}$  la série génératrice exponentielle de la première ligne.  
 Alors

$$\sum_{k,n \geq 0} a_{k,n} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} = e^u a(t+u).$$

COROLLAIRE 4.3. - Soient  $a(t) = \sum_{n \geq 0} a_{0,n} \frac{t^n}{n!}$  et  $b(t) = \sum_{k \geq 0} a_{k,0} \frac{t^k}{k!}$   
les séries génératrices exponentielles de la première ligne et de la première  
colonne d'une matrice de Seidel  $A = (a_{k,n})$ . Alors :

$$b(t) = e^t a(t).$$

En somme, la transformation d'Euler  $\varphi : (a_n) \rightarrow (b_n)$  correspond à la multiplication par l'exponentielle.

Clairement, cette transformation ne possède ni invariant ( $b_n = a_n, n \geq 0$ ), ni anti-invariant ( $b_n = -a_n, n \geq 0$ ). Comme Seidel [61], on peut être moins exigeant et rechercher les suites "presque" invariantes ou anti-invariantes au sens suivant

$$(4.4) \quad b_{0,0} = 1, \quad b_{1,0} = -b_{0,1}, \quad b_{i,0} = b_{0,i} \quad \text{pour } i \geq 2.$$

Il n'existe alors qu'une seule matrice de Seidel vérifiant (4.4). Ses coefficients peuvent être calculés de proche en proche avec la relation (4.1). D'après le corollaire 4.3, la fonction génératrice de la première ligne est  $a(t) = t/(e^t - 1)$ . Ainsi cette suite est la suite des nombres de Bernoulli :

$$b_{0,0} = 1, \quad b_{0,1} = -\frac{1}{2}, \quad b_{0,2n} = (-1)^{n+1} B_{2n}, \quad b_{0,2n+1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Similairement, il existe une seule matrice de Seidel  $G = (g_{k,n})$  telle que

$$(4.5) \quad g_{0,0} = 0, \quad g_{0,1} = g_{1,0} = 1, \quad g_{i,0} = -g_{0,i} \quad \text{pour } i \geq 2.$$

D'après le corollaire 4.3, la première ligne a comme série génératrice  $2t/(e^t + 1)$ . Ainsi cette suite est la suite des nombres de Genocchi :

$$g_{0,0} = 0, \quad g_{0,1} = 1, \quad g_{0,2n} = (-1)^n G_{2n}, \quad g_{0,2n+1} = 0, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Les premiers termes de la matrice  $G = (g_{k,n})$ , dite matrice de Seidel des nombres de Genocchi, sont donnés dans la table 2.

0	1	-1	0	1	0	-3	0	17	0	-155
1	0	-1	1	1	-3	-3	17	17	-155	
1	-1	0	2	-2	-6	14	34	-138		
0	-1	2	0	-8	8	48	-104			
-1	1	2	-8	0	56	-56				
0	3	-6	-8	56	0					
3	-3	-14	48	56						
0	-17	34	104							
-17	17	138								
0	155									
155										

Table 2 : Matrice de Seidel des nombres de Genocchi.

Maintenant si l'on prend comme première ligne la suite des nombres tangents (avec leurs signes) :

$$a_o = 1, \quad a_{2n-1} = (-1)^n E_{2n-1}, \quad a_{2n} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1,$$

ayant comme série génératrice la fonction  $2/(e^{2t} + 1)$ , la première colonne  $(b_n) = \varphi(a_n)$  de la matrice de Seidel associée est la suite de série génératrice  $1/\text{ch } t$ , c'est-à-dire la suite des nombres sécants (avec leurs signes) :

$$b_{2n} = (-1)^n E_{2n}, \quad b_{2n+1} = 0, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

La matrice de Seidel  $E$  est dite matrice de Seidel des nombres d'Euler. C'est la seule matrice de Seidel  $E = (a_{kn})$  telle que

$$(4.6) \quad a_{o,o} = 1, \quad a_{o,2n} = 0, \quad a_{2n-1,o} = 0, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Les premiers termes sont donnés par la table 3.

1	-1	0	2	0	-16	0	272
0	-1	2	2	-16	-16	272	
-1	1	4	-14	-32	256		
0	5	-10	-46	224			
5	-5	-56	178				
0	-61	122					
-61	61						
0							

Table 3 : Matrice de Seidel des nombres d'Euler.



#### 4.2. - Tableau de Kempner

Dans cette section, nous interprétons les nombres d'Euler à partir de la matrice de Seidel correspondante.

La première étape consiste d'abord à transformer légèrement la matrice pour obtenir un tableau de nombres uniquement positifs, appelé tableau de Kempner (des nombres d'Euler). Les premiers éléments sont donnés par la table 4.

				1			
				1	0		← d
m →		0	1	1			
		2	2	1	0		
	0	2	4	5	5		
	16	16	14	10	5	0	
	0	16	32	46	56	61	61
	272	272	256	224	178	122	61
							0

Table 4 : Tableau de Kempner

Dans ce tableau, chaque élément d'une ligne de rang impair (resp. pair) est la somme de celui situé juste au Nord et de celui situé juste à l'Ouest (resp. Est), sauf le premier (resp. dernier) qui est 0 et décalé d'un cran par rapport au premier (resp. dernier) élément de la ligne supérieure. Cette règle détermine le tableau à partir de la première ligne, qui est réduite au nombre 1.

Il est clair que ce tableau est une "réécriture" de la matrice de Seidel des nombres d'Euler : les lignes correspondent aux diagonales de la matrice. Ainsi le dernier (resp. premier) élément de la ligne d'indice impair  $2n+1$  (resp. pair  $2n$ ) est le nombre sécant  $E_{2n}$  (resp. nombre tangent  $E_{2n+1}$ ). On déduit que la somme des éléments de la ligne d'indice  $m$  (pair ou impair) est le nombre d'Euler  $E_m$ .

On peut aussi définir le tableau de Kempner par les opérateurs suivants.

Soit  $V$  l'ensemble des vecteurs formés des  $k$ -uplets d'entiers  $\geq 0$  (avec  $k$  entier variable  $\geq 1$ ). On définit les opérateurs sur  $V$

$$(4.7) \quad m(x_1, \dots, x_k) = (0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

$$(4.8) \quad d(x_1, \dots, x_k) = (x_1 + \dots + x_k, \dots, x_{k-1} + x_k, x_k)$$

La ligne d'indice  $m$  du tableau de Kempner est alors le vecteur obtenu à partir du vecteur  $x_1 = 1$  ( $k=1$ ) en appliquant successivement et alternativement les opérateurs  $d$ , puis  $m$ , puis  $d$ , etc...,  $m-1$  fois. D'où la formule

$$(4.9) \quad E_m = \text{Som}(\underbrace{\dots d \circ m \circ d(1)}_{m-1 \text{ fois}})$$

dans laquelle  $\text{Som} : V \rightarrow \mathbb{N}$  est l'opérateur associant la somme des éléments d'un vecteur.

La règle de formation du tableau de Kempner conduit directement à l'interprétation combinatoire suivante :

LEMME 4.4. - L'élément  $a_{m,\ell}$  d'indice  $\ell$  de la  $m$ ème ligne du tableau de Kempner est égal au nombre de fonctions sous-excédantes  $f \in \mathfrak{S}_m$  telles que

$$(4.10) \quad f(i) \geq f(i+1) \text{ pour } i \text{ impair, } f(i) < f(i+1) \text{ pour } i \text{ pair, } 0 \leq i < m.$$

Maintenant, en considérant les permutations dont les tables d'inversions vérifient (4.10), on déduit de la condition (ii) de la proposition 2.4 le corollaire suivant :

PROPOSITION 4.5. - L'élément  $a_{m,\ell}$  du tableau de Kempner est le nombre de permutations alternantes de  $\mathfrak{S}_m$  dont la dernière lettre est  $\ell$ .

Ainsi, pour les nombres d'Euler, la matrice de Seidel n'introduit pas de nouvelles interprétations. Nous avons plutôt une preuve combinatoire de l'identité (4.9).

4.3. - Pistolets alternants

Cette section est l'analogie de la section précédente pour les nombres de Genocchi.

Nous définissons un tableau de nombres  $(h_{k,m})$  par  $h_{1,1} = 1$  et la règle de construction suivante.

Chaque élément d'une colonne d'indice pair est la somme de celui situé juste au Nord et de celui juste à l'Ouest, sauf l'élément du haut qui est la répétition de celui situé juste à l'Ouest. Chaque élément d'une colonne d'indice impair est la somme de celui situé juste au Sud et de celui juste à l'Ouest, sauf l'élément du bas qui est égal à celui situé à l'Ouest, et l'élément du haut qui est répété (voir table 5).

Formellement, cette récurrence est donnée par

$$(4.11) \left\{ \begin{array}{l} - \text{ pour } m = 2n \geq 2, \quad h_{n,m} = h_{n,m-1} \quad \text{et pour } k \in [n-1], \\ \quad \quad \quad h_{k,m} = h_{k+1,m} + h_{k,m-1}; \\ - \text{ pour } m = 2n-1 \geq 3, \quad h_{1,m} = h_{1,m-1} \quad \text{et pour } k \in [2, n-1], \\ \quad \quad \quad h_{k,m} = h_{k-1,m} + h_{k,m}, \quad h_{n,m} = h_{n-1,m}. \end{array} \right.$$

Les premières valeurs sont données par la table suivante.

								155	155	5
						17	17	155	310	4
			3	3	17	34	138	448		3
		1	1	3	6	14	48	104	552	2
1	1	1	2	2	8	8	56	56	608	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\begin{array}{c} k \\ m \end{array}$

Table 5 : Le "pistolet de Genocchi"

Le lecteur reconnaîtra que les nombres de la table 5 sont les mêmes, au signe et à un réarrangement près, que les nombres situés au-dessus (resp. au-dessous) de la diagonale du tableau 2. Ceci est vrai en toute généralité et permet de déduire :

PROPOSITION 4.6. - Le tableau de nombres  $(h_{k,m})$  défini par  $h_{1,1} = 1$  et la récurrence 4.11 se déduit de la matrice de Seidel des nombres de Genocchi

$G = (g_{k,m})$  par la relation

$$(4.12) \quad (-1)^n h_{k,2n} = g_{n+1-k, n+k}, \quad (-1)^n h_{k,2n-1} = g_{n-k, n+k}, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

COROLLAIRE 4.7. -  $G_{2+2} = \sum_{1 \leq k \leq n} h_{k,2n}$ , pour  $n \geq 1$ .

Cette dernière relation permet alors, comme dans le cas du tableau de Kempner des nombres d'Euler, de déduire une interprétation combinatoire des nombres de Genocchi.

DEFINITION 4.8. - Un pistolet sur  $[m]$  est une application  $p : [m] \rightarrow [m]$  telle que

$$(4.13) \quad p(2i) \leq i \quad \text{et} \quad p(2i-1) \leq i \quad \text{pour } i \geq 1.$$

DÉFINITION 4.9. - Un pistolet alternant sur  $[m]$  est un pistolet tel que

$$(4.14) \quad p(i) \geq p(i+1) \quad \text{pour } i \text{ impair et } p(i) < p(i+1) \quad \text{pour } i \text{ pair, } 1 \leq i < m.$$

Exemple 4.10. - Le pistolet  $p = p(1) \dots p(8) = 11213332$  est alternant. Celui-ci est visualisé sur la figure 6.

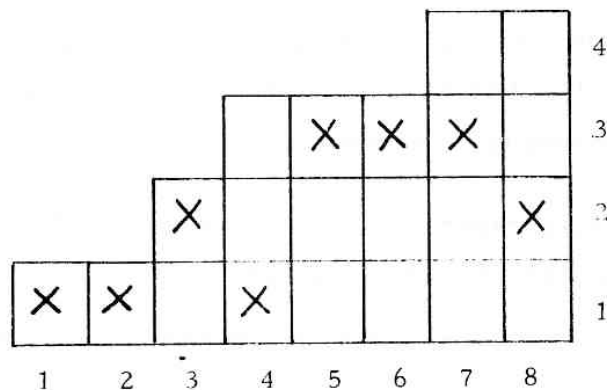


Figure 6 : Le pistolet alternant  $p = 11213332$ .

La récurrence (4.11) et le corollaire 4.7 permettent de déduire immédiatement :

PROPOSITION 4.11. - Pour  $n \geq 1$ , le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est le nombre de pistolets alternants sur  $[2n]$ . De plus  $h_{k, 2n}$  est le nombre de ces pistolets  $p$  tels que  $p(2n) = k$ .

A tout pistolet  $p$  alternant sur  $[2n]$ , nous associons le pistolet  $p'$  sur  $[2n+1]$  défini par la relation

$$(4.15) \quad p'(1) = 1, \quad p'(2i) = i+1 - p(2i-1), \quad p'(2i+1) = i+2 - p(2i), \quad \text{pour } i \in [n]$$

puis la fonction sous-excédante  $f \in \mathfrak{F}_{2n+1}$

$$(4.16) \quad f(i) = 2(p'(i) - 1) \quad \text{pour } i \in [2n+1].$$

Il est immédiat de vérifier que  $p$  est alternant (condition (4.14)) si et seulement si  $f$  est la table d'inversion d'une permutation de  $\mathfrak{S}_{2n+1}$ .

On déduit :

PROPOSITION 4.12. - Pour  $n \geq 1$ , le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est le nombre de permutations alternantes  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}$  dont la table d'inversion (définie par (2.5))  $f = I(\sigma)$  est à valeurs paires (c'est-à-dire  $f(i)$  pair pour  $i \in [2n+1]$ ).

Exemple 4.13. - Le pistolet alternant  $p = 11213332$  de la figure 6, intervenant pour le dénombrement de  $G_{10} = 155$ , est transformé successivement par (4.15), (4.16) et  $I^{-1}$  en  $p' = 112131224$ ,  $f = 002040226$ ,  $\sigma = I^{-1}(f) = 658291437$ , permutation alternante avec table d'inversion à valeurs paires.

Nous terminons ce paragraphe en donnant deux applications de l'interprétation combinatoire donnée ici des nombres de Genocchi.

D'une part, l'identité suivante, dite de Seidel par Nielsen [51]

$$(4.17) \quad \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} G_{2n-2k} = 0$$

se "lit" directement sur les pistolets alternants par un dénombrement du type "inclusion-exclusion". Ces pistolets permettent ainsi de donner une preuve combinatoire de cette identité. En utilisant (4.2), on peut remarquer que cette identité équivaut à dire que les termes  $g_{i,i}$ ,  $i \geq 0$ , de la diagonale de la matrice de Seidel  $G$  des nombres de Genocchi, sont nuls.

D'autre part l'interprétation en permutations alternantes peut se traduire sur les chemins valués  $(\gamma_c, f)$ , comme dans le cas des nombres d'Euler, grâce au lemme suivant :

LEMME 4.14. - Soit  $\sigma$  une permutation alternante et  $(\gamma, f) = \theta^{-1}(\sigma)$  le chemin valué associé (voir section 2.6). Alors la table d'inversion  $I(\sigma)$  est à valeurs paires si et seulement si  $f$  est à valeurs impaires.

COROLLAIRE 4.15 - Pour  $n \geq 1$ , le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est le nombre de couples  $(\gamma, f) \in T_{2n+1}$  tels que  $\gamma$  est une fonction de Dyck (définition 2.17) et  $f$ , fonction dominée par  $\gamma$ , est à valeurs impaires (soit  $f(i)$  impair pour  $i \in [2n+1]$ ).

Une autre formulation possible est la suivante

$$(4.18) \quad G_{2n+2} = \sum_{\gamma} \binom{2n+1}{i=1} \left\lceil \frac{\gamma(i)}{2} \right\rceil$$

dans lequel  $\lceil x \rceil$  désigne le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$  (notation APL de l'opérateur "plafond"), et la sommation est étendue à toutes les fonctions de Dyck  $\gamma$  sur  $[2n+1]$ .

Le produit du deuxième membre peut être considéré comme le produit des hauteurs "comptées de 2 en 2", des sommets du chemin de Dyck associé à  $\gamma$ .

Exemple 4.16. - D'une manière analogue à la figure 5 de l'exemple 3.6 relatif aux nombres d'Euler, nous donnons sur la figure 7 le cas  $2n+1 = 7$ . Ici

$$G_8 = 1 + 2 + 2 + 4 + 8 = 17.$$

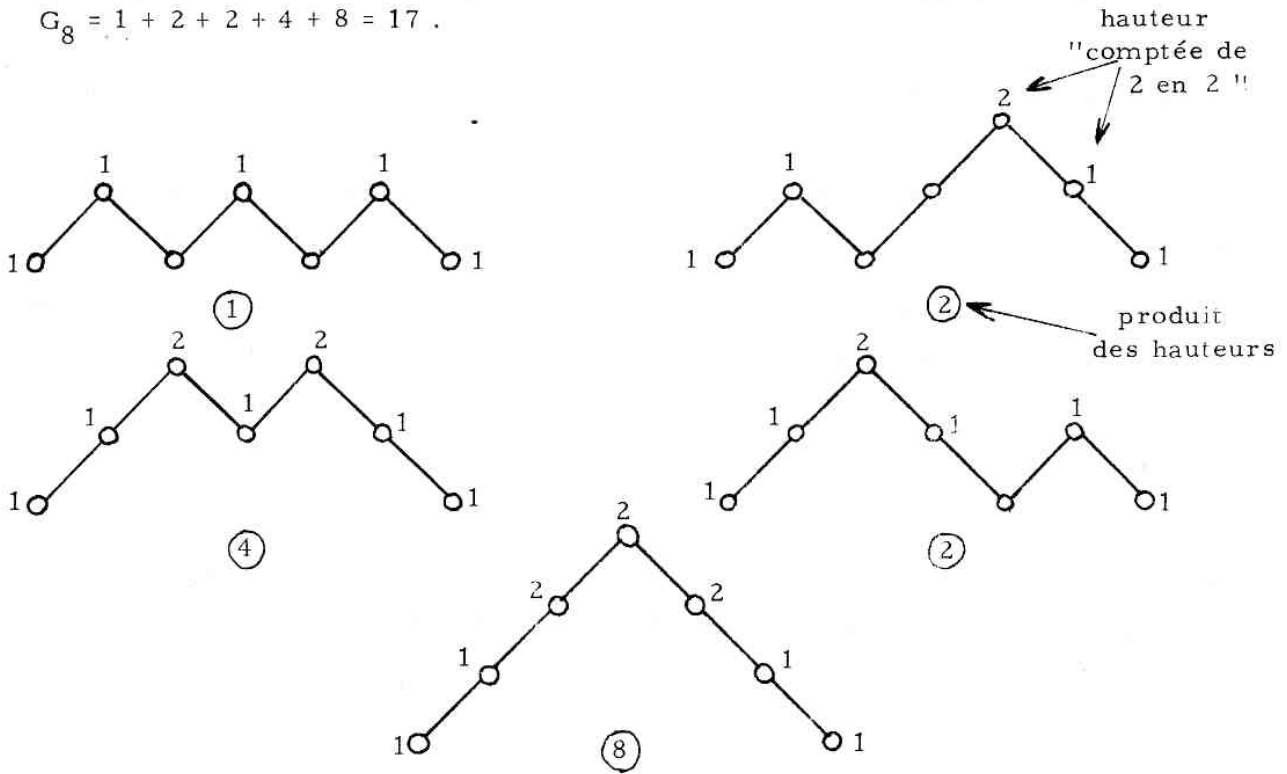


Figure 7

Nous donnerons deux applications du corollaire 4.15. D'une part celui-ci permet de donner une preuve "bijective" de la conjecture de Gandhi relatif aux nombres de Genocchi (Gandhi [34], voir le paragraphe suivant). D'autre part la relation (4.18) n'est pas autre chose que l'interprétation combinatoire du développement en fraction continuée de la série génératrice (ordinaire) des nombres de Genocchi (voir le paragraphe 7).

### Références bibliographiques

Le tableau de Kempner de la section 4.2 est un cas particulier (pour les permutations alternantes) du tableau donnant la distribution des permutations ayant une forme donnée selon leurs dernières (ou premières) lettres. Cette distribution est donnée par Entringer [20] et Niven [52], par des méthodes "bijectives". Il ne semblait pas commode de démontrer directement (sans bijections) que le tableau de Kempner donne naissance aux fonctions tangente et sécante. La preuve analytique était en fait dans l'article fondamental de Siedel [61], près de 90 ans plus tôt, et complètement oublié depuis. La terminologie "tableau de Kempner" est due à Schützenberger.

L'interprétation combinatoire des nombres de Genocchi en pistolets alternants (proposition 4.11) et en certaines permutations alternantes (proposition 4.12) provient de Dumont, Viennot [17]. La traduction en "chemins valués" (identité (4.18)) provient de Françon, Viennot [33].

Signalons pour l'anecdote, que le tableau défini par (4.11) et appelé "pistolet de Genocchi" fut découvert expérimentalement par l'auteur de cet article lors de son apprentissage du langage APL. De là, avec Dumont, fut découvert les interprétations combinatoires et finalement l'article de Seidel !

### § 5. - Génération de Gandhi des nombres de Genocchi

#### 5.1. - Polynômes de Gandhi

Soit  $P_{2n}(x)$ ,  $n \geq 1$ , la suite de polynômes définis par la récurrence suivante

$$(5.1) \quad \begin{cases} - P_2(x) = x^2, \\ - P_{2n+2}(x) = x^2 \Delta(P_{2n}(x)) = x^2(P_{2n}(x+1) - P_{2n}(x)). \end{cases}$$

Gandhi a conjecturé en 1970 ([34]), (en fait sous une forme légèrement différente que celle adoptée ici) la relation suivante :

$$(5.2) \quad P_{2n}(1) = G_{2n+2}, \quad \text{pour } n \geq 1.$$



Cette conjecture fut démontrée par Carlitz [7] et Riordan, Stein [56], par des méthodes analytiques. Le but de ce paragraphe est d'interpréter la récurrence (5.1) pour donner une deuxième interprétation combinatoire des nombres de Genocchi.

Remarquons que les polynômes  $P_{2n}(x)$  ont des coefficients entiers positifs. Leur somme est le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$ . Ces polynômes sont appelés polynômes de Gandhi et leurs coefficients sont notés par :

$$(5.3) \quad P_{2n}(x) = \sum_k B_{2n,k} x^k.$$

Les premières valeurs sont données dans la table 6.

$2n \backslash k$	2	3	4	5	6	7	$G_{2n+2}$
2	1						1
4	1	2					3
6	3	8	6				17
8	17	54	60	24			155
10	155	556	762	480	120		2073
12	2073	8146	12840	10248	4200	720	38227

Table 6 : Coefficients  $B_{2n,k}$  des polynômes de Gandhi

### 5.2. - Pistolets surjectifs

DÉFINITION 5.1. - Un pistolet surjectif  $p$  sur  $[2n]$  est un pistolet (définition 4.8) qui est surjectif en tant qu'application  $p : [2n] \rightarrow [n]$ .

Exemple 5.2. - Le pistolet  $p = 11212314$  schématisé sur la figure 7 est surjectif.

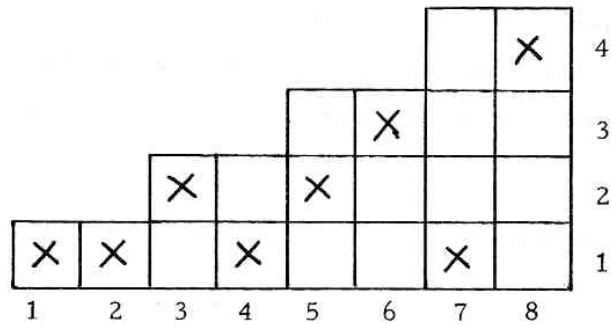


Figure 7 : Un pistolet surjectif

PROPOSITION 5.3. - Pour  $n \geq 1$ , le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est égal au nombre de pistolets surjectifs sur  $[2n]$ .

Donnons une idée de la preuve. Celle-ci repose en fait sur le lemme plus précis suivant :

LEMME 5.4. - Pour  $n \geq 1$ ,  $k \geq 2$ , le coefficient  $B_{2n,k}$  du polynôme de Gandhi  $P_{2n}(x)$  est égal au nombre de pistolets surjectifs sur  $[2n]$  ayant  $k$  indices  $i \in [2n]$  tels que  $p(i) = 1$ .

Là encore la preuve consiste à montrer que la "croissance" de l'objet combinatoire correspond exactement à la récurrence (5.1) définissant les polynômes de Gandhi. Par "croissance" nous entendons ici la façon d'obtenir un pistolet surjectif sur  $[2n+2]$  en rajoutant "la ligne du bas" à un pistolet surjectif sur  $[2n]$ . Par exemple le pistolet  $p = 11212314$  est obtenu à partir du pistolet  $q = 111213$ , en "coloriant" les éléments  $q(i) = 1$  de la première ligne en deux couleurs (ici bleu pour  $p(1)$  et  $p(3)$ , rouge pour  $p(2)$  et  $p(5)$ ), puis en "abaissant" d'une ligne les éléments rouges, enfin en "rajoutant" au début de la nouvelle ligne ainsi créée deux éléments  $p(1) = p(2) = 1$  (voir figure 8).

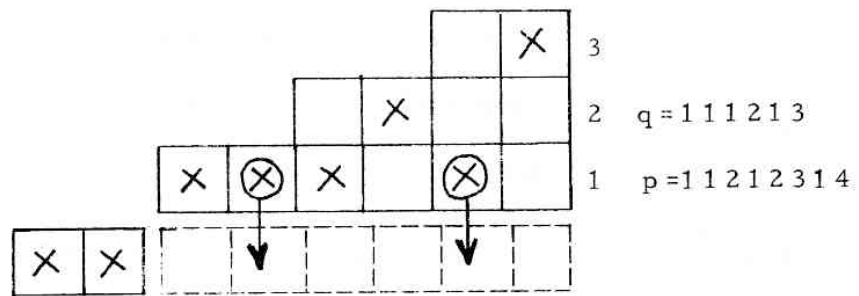


Figure 8 : Croissance "par le bas" des pistolets surjectifs

Supposons le lemme 5.4 vrai pour  $n$ . L'opération "coloriage" correspond au passage de  $P_{2n}(x)$  à  $P_{2n}(x+1)$  : ce dernier polynôme énumère les pistolets surjectifs "coloriés" de  $[2n]$  selon le nombre d'éléments  $p(i)=1$  coloriés en rouge. La surjectivité impose de ne pas colorier en rouge tous les éléments  $p(i)=1$ . Ceci correspond à retrancher  $P_{2n}(x)$  du polynôme  $P_{2n}(x+1)$ . Enfin rajouter deux éléments au début de la première ligne correspond à multiplier par  $x^2$ . On retrouve bien la récurrence (5.1) des polynômes de Gandhi.

L'idée essentielle est que la surjectivité correspond à l'opérateur  $\Delta$  du calcul aux différences finies. Cette idée est précisée dans Viennot [68].

Grâce à la bijection  $\gamma$  entre permutations et forêts d'arbres croissants (section 2.5), nous traduisons l'interprétation de la proposition 5.3 en termes de permutations.

**PROPOSITION 5.5.** - Pour  $n \geq 1$ , le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est le nombre de permutations  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_{2n+1}$  telles que l'ensemble des montées soit l'ensemble  $\{2, 4, \dots, 2n\}$  des nombres pairs de  $[2n+1]$ , c'est-à-dire :

$$(5.4) \quad \sigma(i) < \sigma(i+1) \text{ si et seulement si } \sigma(i) \text{ est pair, } i \in [2n].$$

A tout pistolet  $p : [2n] \rightarrow [n]$ , on associe la fonction sous-excédante  $f : [2n+1] \rightarrow [0, 2n]$  par la relation suivante :

$$(5.5) \quad \begin{cases} - \text{ pour } i \in [2n], & f(i) = 2(p(i)-1) \\ - & f(2n+1) = 2n. \end{cases}$$

Avec la bijection  $\eta$  définie par (2.9), nous associons une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ . D'après la condition (ii) de la proposition 2.14, cette permutation satisfait (5.4) si et seulement si le pistolet  $p$  est surjectif. Ceci prouve la proposition 5.5.

Remarque 5.6. - Cette interprétation combinatoire apparaît un peu comme la duale de celle des nombres tangents par les permutations alternantes. La dualité consiste ici à échanger les notions "index  $i$ " et "valeur  $\sigma(i)$ ". Curieusement, cette dualité ne provient pas (du moins jusqu'à présent) de la relation (1.6) liant les nombres tangents et de Genocchi.

### 5.3. - Démonstration "bijective" de la conjecture de Gandhi

Donner une démonstration "bijective" de l'identité (5.2) conjecturée par Gandhi, revient à donner une bijection entre les pistolets surjectifs et les pistolets alternants (définition 4.9). Malgré l'apparente similarité des deux objets combinatoires, il n'existe pas à présent de bijection "directe" connue, entre ces deux classes de pistolets.

Il est équivalent d'en chercher une entre les permutations de la proposition 5.5 et celles de la proposition 4.12. Là encore il ne semble pas évident d'en expliciter une. Par contre, si l'on retraduit en termes de chemins valués  $(\gamma_c, f)$  ces deux classes de permutations, il est très facile d'exhiber une bijection entre les deux classes correspondantes de chemins valués.

Pour les pistolets alternants, provenant de la génération de Seidel des nombres de Genocchi, le corollaire 4.15 nous a déjà donné les couples  $(\gamma_c, f) \in T_{2n+1}$  associés. Notons ceux-ci  $TA_{2n+1}$  (A pour alternant) :

(5.6)  $TA_{2n+1}$  désigne l'ensemble des couples  $(\gamma_c, f) \in T_{2n+1}$  tels que  $\gamma$  est une fonction de Dyck et  $f$  est à valeur impaires.

Les permutations  $\sigma$  issues de la génération de Gandhi des nombres de Genocchi, peuvent également être caractérisées simplement par le couple  $(\gamma_c, f) = \theta^{-1}(\sigma)$ . La permutation  $\sigma$  vérifie (5.4) si et seulement si  $(\gamma_c, f)$  appartient à l'ensemble  $TS_{2n+1}$  défini par la relation suivante :

(5.7)  $TS_{2n+1}$  désigne l'ensemble des couples  $(\gamma_c, f) \in T_{2n+1}$  tels que l'ensemble  $\{2, 4, \dots, 2n\}$  est l'ensemble des  $i \in [2n]$  tels que soit  $\gamma(i) < \gamma(i+1)$ , soit  $\gamma(i) = \gamma(i+1)$  avec coloriage DM.

Il est clair que la donnée d'une fonction de Motzkin colorée  $\gamma_c$  sur  $[m]$  équivaut à la donnée du quadruplet  $(P, Q, DM, DD)$  avec

$$\begin{aligned} P &= P(\gamma_c) = \{i \in [m-1], \gamma(i) > \gamma(i+1)\} \cup \{m\}, \\ Q &= Q(\gamma_c) = \{i \in [m-1], \gamma(i) < \gamma(i+1)\}, \\ DM &= DM(\gamma_c) = \{i \in [m-1], \gamma(i) = \gamma(i+1) \text{ colorié DM}\}, \\ DD &= DD(\gamma_c) = \{i \in [m-1], \gamma(i) = \gamma(i+1) \text{ colorié DD}\}. \end{aligned}$$

La bijection cherchée  $\chi$  entre  $TS_{2n+1}$  et  $TA_{2n+1}$  est alors définie par la relation

(5.8) Pour  $(\gamma_c, f) \in TS_{2n+1}$ ,  $\chi(\gamma_c, f) = (\gamma', f')$  est le couple de  $TA_{2n+1}$  défini par :

$$\begin{aligned} P(\gamma') &= P(\gamma) \cup DM(\gamma), \quad Q(\gamma') = Q(\gamma) \cup DD(\gamma), \\ DM(\gamma') &= DD(\gamma') = \emptyset \text{ et} \\ f'(i) &= 2f(i) - 1 \text{ pour } i \in [2n+1]. \end{aligned}$$

Nous résumons les bijections utilisées dans la figure 9.

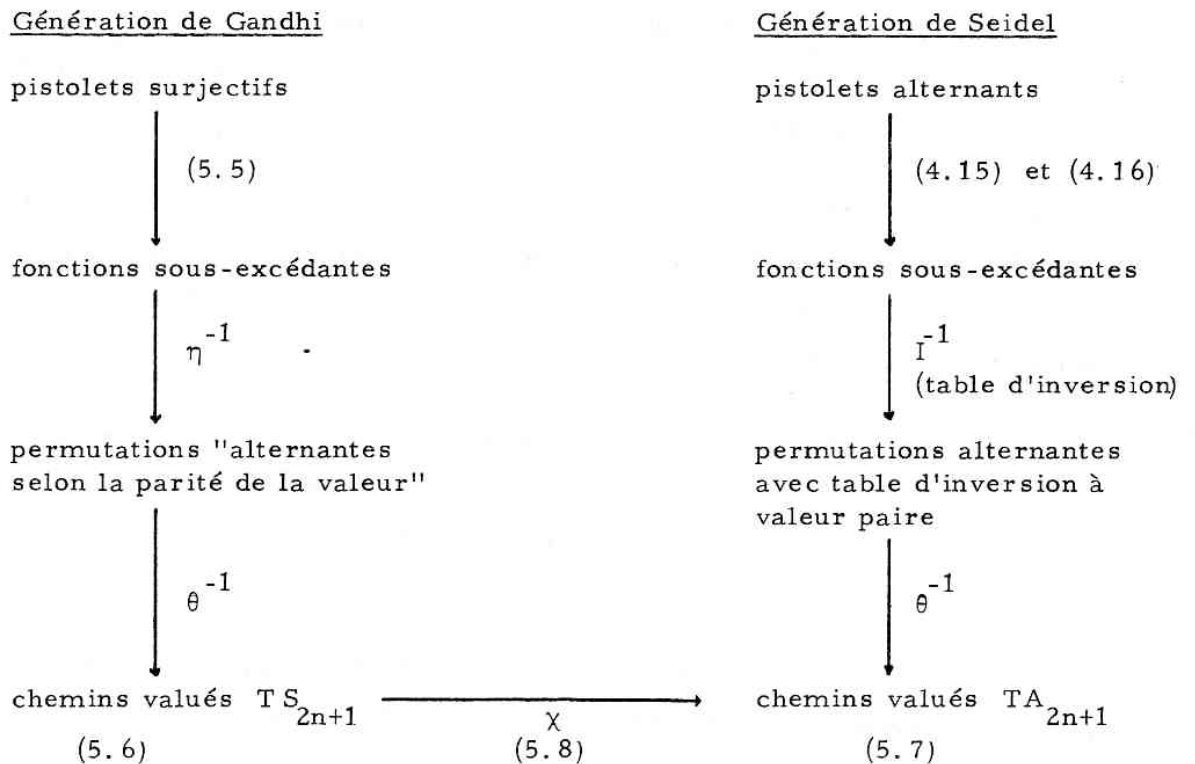


Figure 9

#### 5.4. - La symétrie ternaire des nombres de Genocchi

Les interprétations combinatoires des nombres de Genocchi possèdent une remarquable "symétrie ternaire". Nous la décrivons sur les pistolets surjectifs.

Soit  $p : [2n] \rightarrow [n]$  un pistolet. Nous définissons les trois paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$ .

(5.9)  $\alpha(p)$  est le nombre d'indices  $i \in [2n]$  tels que  $i$  est impair et  $p(i) = \frac{i+1}{2}$  (maximum possible).

(5.10)  $\beta(p)$  est le nombre d'indices  $i \in [2n]$  tels que  $i < j \leq 2n$  implique  $p(j) > p(i)$ .

(5.11)  $\gamma(p)$  est le nombre d'indices  $i \in [2, 2n]$  tels que  $p(i) = 1$  (minimum possible).

Exemple 5.7. - Pour le pistolet  $p = 11212324$ , on a :

$$\alpha(p) = 2, \quad \beta(p) = 3, \quad \gamma(p) = 2.$$

Ces paramètres sont schématisés sur la figure 10 par des croix entourés d'un cercle.

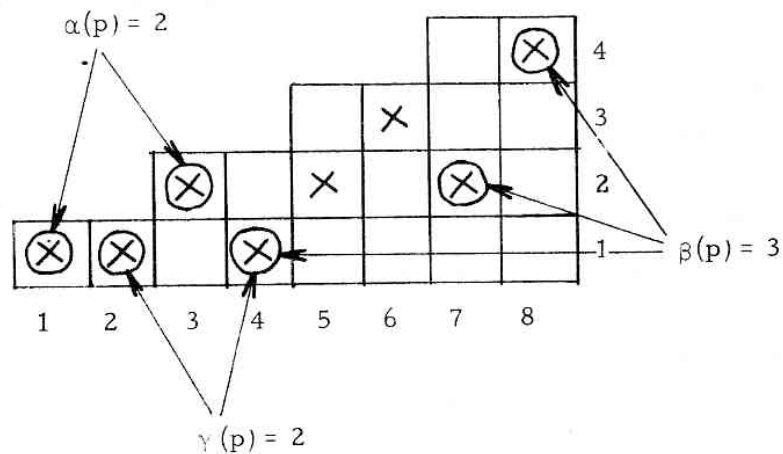


Figure 10 : Les trois paramètres de la symétrie ternaire.

En notant  $G_{2n+2}(i, j, k)$  le nombre de pistolets surjectifs  $p$  sur  $[2n]$  tels que  $\alpha(p) = i$ ,  $\beta(p) = j$  et  $\gamma(p) = k$ , on peut énoncer

PROPOSITION 5.8. - Pour toute permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_3$ ,

$$G_{2n+2}(i, j, k) = G_{2n+2}(\tau(i), \tau(j), \tau(k)).$$

La preuve consiste à trouver deux involutions sur les pistolets surjectifs, l'une échangeant les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  en conservant  $\gamma$ , l'autre échangeant  $\alpha$  et  $\gamma$  en conservant  $\beta$  (voir Dumont, Foata [15]).

La symétrie ternaire des pistolets surjectifs peut surprendre. Les involutions échangeant les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ne sont pas du tout évidentes à exhiber. On pourrait aussi espérer une bijection entre les pistolets surjectifs et certains objets combinatoires ayant une "allure triangulaire", et pour lesquels la symétrie ternaire deviendrait évidente. Jusqu'à ce jour de tels objets restent à découvrir (voir le paragraphe 9). Toutefois nous introduisons ci-dessous des objets en

forme de triangle, ayant "presque" une allure symétrique par rapport aux trois côtés, et interprétant également la récurrence (5.1) des polynômes de Gandhi.

DÉFINITION 5.9. - Un triangle coloré sur  $[n]$  est le choix d'un placement de  $n$  pions colorés "rouge" et de  $n$  pions colorés "bleu", sur les sommets d'un "réseau" de triangles équilatéraux (du type de la figure 11) et tels que sur chaque droite de pente  $\pi/3$  (resp.  $2\pi/3$ ) il y ait un et un seul pion rouge (resp. bleu).

Remarquons que deux pions (nécessairement l'un bleu et l'autre rouge) peuvent être posés sur le même sommet.

DÉFINITION 5.10. - Un triangle coloré est dit subjectif si sur chaque droite horizontale du réseau il y a au moins un pion (bleu ou rouge).

Par exemple, les triangles colorés de la figure 11 sont tous subjectifs.

Il est clair que la donnée d'un triangle coloré sur  $[n]$  revient à celle de deux fonctions sous-excédantes  $f$  et  $g$  de  $\mathfrak{X}_n$ . Le placement des pions bleus (resp. rouges) est codé par  $f$  (resp.  $g$ ) d'une manière évidente comme indiqué pour le dernier triangle de la figure 11. Ce couple  $(f, g)$  est aussi le codage d'un pistolet  $p$  sur  $[2n]$ . Il suffit de prendre :

$$(5.12) \quad p(2i-1) = f(i) \quad , \quad p(2i) = g(i), \quad \text{pour } i \in [n].$$

En notant  $\text{Im}(f) = \{f(i), i \in [n]\}$ , il est clair que le triangle coloré (resp. le pistolet) associé au couple  $(f, g)$  est subjectif si et seulement si  $\text{Im}(f) \cup \text{Im}(g) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . On a ainsi une bijection entre les pistolets subjectifs et les triangles colorés subjectifs. Ceux-ci sont donc également dénombrés par le nombre de Genocchi.

En fait on peut énoncer un théorème plus précis :

PROPOSITION 5.11. - Il existe une bijection  $\nu$  entre les pistolets subjectifs  $p$  sur  $[2n]$  et les triangles colorés subjectifs sur  $[n]$  telle que  $1+\alpha(p)$  (resp.  $1+\beta(p)$ , resp.  $1+\gamma(p)$ ) est égal au nombre  $\alpha(\nu(p))$  (resp.  $\beta(\nu(p))$ , resp.  $\gamma(\nu(p))$ ) de pions sur le grand côté du triangle  $\nu(p)$  de direction  $\pi/3$  (resp.  $2\pi/3$ , resp. horizontale).



Cette bijection est un peu plus élaborée que celle utilisant le codage par le couple  $(f, g)$  de fonctions sous-excédantes de  $\mathfrak{F}_n$ . Il suffit de reprendre la construction récursive d'un pistolet surjectif "par le bas", interprétant la récurrence de Gandhi (5.1) et exposée lors de la preuve du lemme 5.4. Cette récurrence peut également s'interpréter directement sur les triangles colorés surjectifs. A chaque étape, on choisit un sous-ensemble des pions situés sur le grand côté horizontal du triangle. Ces pions sont alors "abaissés" sur la ligne du dessous nouvellement créée, les bleus (resp. les rouges) glissant dans la direction de pente  $-\pi/3$  (resp.  $-2\pi/3$ ). Ensuite on rajoute un pion bleu (resp. rouge) à l'extrémité gauche (resp. droite) du grand côté horizontal du triangle ainsi formé. Une bijection  $\nu$  peut alors être définie en mettant en correspondance, à chaque étape de la construction, les deux parties de pions choisies qui seront "abaissés". Pour les pistolets surjectifs, on numérote les éléments de la ligne du bas  $p(i)=1$  de gauche à droite. On fait de même pour les triangles colorés, avec la convention que si deux pions occupent le même sommet, le pion bleu est numéroté avant le rouge. La règle est alors d'abaisser en même temps les pions (ou éléments) ayant les mêmes indices dans les deux numérotations. Ceci définit la bijection  $\nu$  (voir figure 11).

Il est aisé de vérifier que les éléments du pistolet surjectif  $p$  contribuant au paramètre  $\alpha(p)$  (resp.  $\beta(p)$ ) sont les éléments qui, à un moment donné de la récursion, étaient premiers (resp. derniers) éléments de la ligne du bas et qui n'ont pas été choisis pour être abaissés. Il est clair que ces éléments correspondent aux pions bleus (resp. rouges) qui ont été "laissés" sur le grand côté du triangle de pente  $\pi/3$  (resp.  $2\pi/3$ ). On a ainsi la conservation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  au cours de la bijection  $\nu$  (le décalage de 1 provient du fait qu'il y a toujours un point rouge (resp. bleu) sur le grand côté de pente  $\pi/3$  (resp.  $2\pi/3$ )).

La conservation du paramètre  $\gamma$  est triviale (ici le décalage de 1 provient de la convention (5.11) de ne pas compter l'élément  $p(1)=1$  du pistolet).

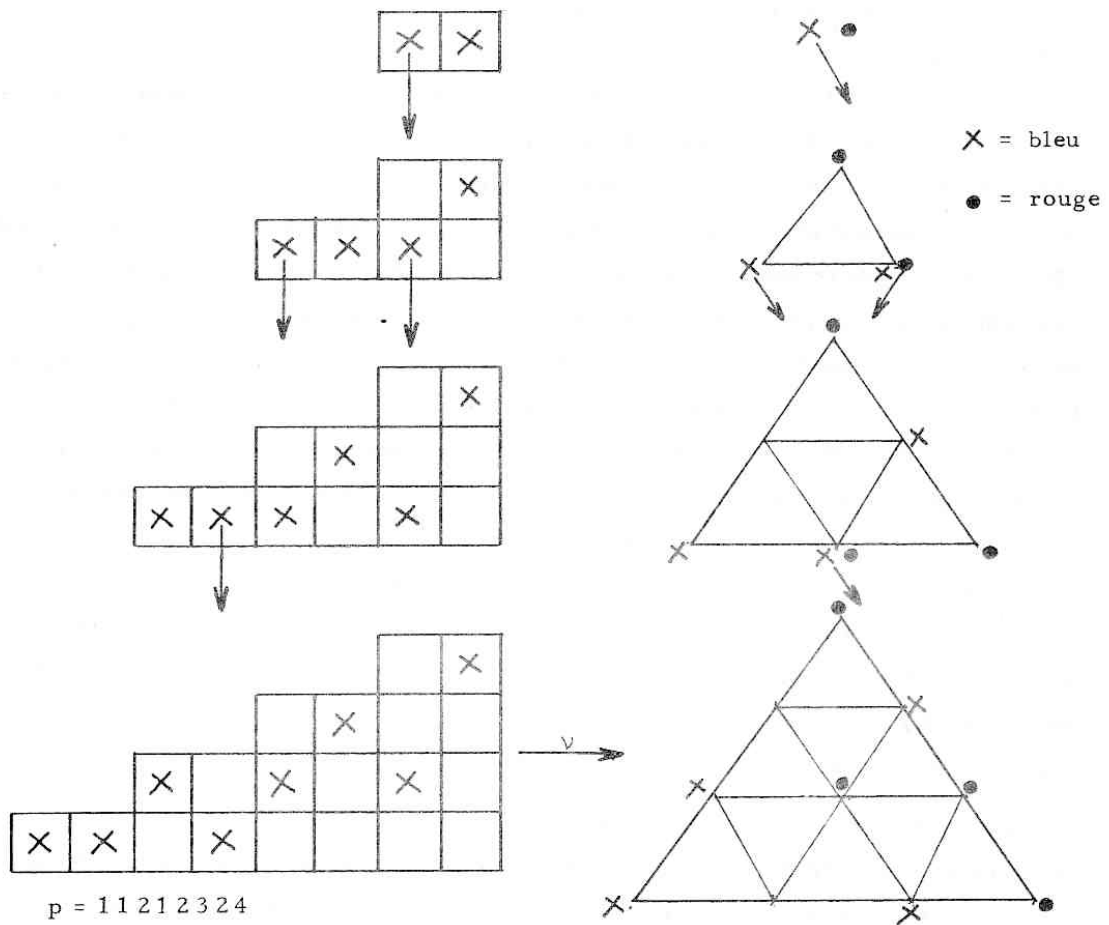


Figure 11 : La bijection  $\nu$  entre pistolets surjectifs et triangles colorés surjectifs

La figure 11 donne la construction du triangle  $\nu(p)$  pour le pistolet  $p = 11212324$  de la figure 10. Les croix " " désignent les pions bleus et les points " " désignent les pions rouges. Remarquons que le codage de  $p$  par couple  $(f, g)$  de fonctions sous-excédantes est  $f = 0111$ ,  $g = 0023$ , tandis que celui de  $\nu(p)$  est  $f' = 0102$ ,  $g' = 0113$ .

Ainsi la démonstration de la symétrie ternaire des pistolets surjectifs (proposition 5.8) revient à celle des triangles colorés surjectifs. Sur ces objets il est trivial qu'il existe une involution échangeant les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et conservant le paramètre  $\gamma$ . L'existence d'une autre involution (échangeant  $\alpha$  et  $\gamma$  et conservant  $\beta$ ) reste cachée.

Nous terminons cette section par la traduction "analytique" de cette symétrie ternaire des objets combinatoires.

PROPOSITION 5.12. - Soit  $F_n(x, y, z)$ ,  $n \geq 1$ , la suite des polynômes définie par la relation de récurrence

$$(5.13) \quad \begin{aligned} F_2(x, y, z) &= 1 \\ F_n(x, y, z) &= (x+z)(y+z) F_{n-1}(x, y, z+1) - z^2 F_{n-1}(x, y, z), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Alors

$$xyz F_n(x, y, z) = \sum_{1 \leq i, j, k} G_{2n+2}(i, j, k) x^i y^j z^k.$$

La récurrence (5.13) apparaît comme un raffinement de la récurrence (5.1). En raisonnant de manière analogue à la preuve du lemme 5.4, on montre que (5.13) exprime la croissance "par le bas" des triangles colorés surjectifs. On retrouve évidemment les polynômes de Gandhi :

$$(5.14) \quad F_n(1, 1, z) = P_{2n}(z).$$

Un corollaire de la preuve bijective de la symétrie ternaire est :

COROLLAIRE 5.13. - Pour  $n \geq 1$ , le polynôme  $F_n(x, y, z)$  défini par (5.13) est symétrique en les trois variables  $x, y, z$ . De plus la somme de ses coefficients (tous positifs) est le nombre de Genocchi :

$$F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2}.$$

Les premières valeurs des nombres  $G_{2n}(i, j, k)$ , constituant un raffinement des nombres  $B_{2n, k}$  (voir table 6), sont donnés dans la table 7. En raison de la symétrie, seuls les entiers  $G_{2n}(i, j, k)$  avec  $i \leq j \leq k$  apparaissent dans la table.

$2n$	$ijk$	$G_{2n}(i, j, k)$	$ijk$	$G_{2n}(i, j, k)$	$ijk$	$G_{2n}(i, j, k)$		
4	111	1						
6	122	1						
8	123	1	133	1	222	2		
	223	2						
10	123	1	124	2	133	4		
	134	3	144	1				
	223	8	224	6			222	2
	234	3	333	6			233	12
12	123	3	124	8	125	6		
	133	16	134	24	135	11		
	144	22	145	6	155	1		
	222	6	223	32	224	48		
	225	22	233	84	234	74		
	235	18	244	36	245	4		
	333	126	334	60	335	6		
	344	12						

Table 7 : Les nombres  $G_{2n}(i, j, k)$  de la symétrie ternaire

#### 5.5. - Hauteur des pics des permutations alternantes

Nous terminons ce paragraphe en donnant une autre interprétation combinatoire des coefficients  $B_{2n, k}$  des polynômes de Gandhi.

DÉFINITION 5.14. - Soient  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $x \in [n]$ . La hauteur de  $x$  relativement à  $\sigma$ , notée  $h_\sigma(x)$  est la hauteur de  $x$  relativement à l'arbre binaire croissant  $\delta(\sigma)$  (défini par (2.7)).

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 5.15. - Le nombre de pics ayant la hauteur  $k$  parmi toutes les permutations alternantes de  $\mathfrak{S}_{2n+1}$  est égal à  $2^{2n} B_{2n,k}$ .

Il n'existe pas de preuve "bijective" de ce résultat. La preuve (voir Strehl [64]) utilise un résultat "analytique" de Carlitz [8] sur les polynômes symétriques  $F_n(x, y, z)$  définis en (5.13), à savoir l'identité

$$(5.15) \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n F_n(x, y, 1) \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{xy} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{(n)} y^{(n)}}{(2n)!} (e^{z/2} - e^{-z/2})^{2n}$$

avec  $x^{(n)} = x(x+1) \dots (x+n-1)$ .

Remarque 5.16. - Le nombre total de pics des permutations alternantes sur  $[2n+1]$  est évidemment  $(n+1)E_{2n+1}$ . On retrouve ainsi (sans que cela constitue une preuve "bijective") la relation (1.6) reliant les nombres tangents et les nombres de Genocchi.

COROLLAIRE 5.17. - Le nombre de permutations alternantes sur  $[2n+1]$  ayant  $k+1$  éléments saillants est égal à  $2^{2n-k} B_{2n,k}$ .

D'après la proposition 2.11, ceci revient à montrer que le nombre d'arbres binaires croissants complets (c'est-à-dire sans points simples) ayant les arêtes de leur branche gauche colorées avec deux couleurs (bleu ou rouge par exemple), est égal à  $2^k B_{2n,k}$ . Or ces arbres colorés  $b$  sont en bijection avec les feuilles des arbres binaires (non colorés) complets. Il suffit de considérer la suite (croissante)  $x_0, x_1, \dots, x_k$  des sommets de la branche gauche de  $b$ . On associe alors la feuille  $x_k$  de l'arbre binaire croissant complet obtenu à partir de  $b$  en lui appliquant les involutions (commutant entre elles)  $I_x$  avec  $x = x_i$ ,  $0 \leq i < k$ , et l'arête allant de  $x_i$  à  $x_{i+1}$  étant colorée rouge. (Ces involutions  $I_x$  sont définies à la section 3.3 sur les permutations d'André.) La proposition 5.15 termine donc la preuve.  $\square$

Remarquons que là encore il n'existe pas à ce jour de preuve "bijective" connue du corollaire 5.17.

### Références bibliographiques

Les polynômes de Gandhi (appelés aussi polynômes de Gandhi modifiés) ont été introduits sous une forme légèrement différente par Gandhi [34]. La démonstration (analytique) de la conjecture de Gandhi (5.2) par Carlitz [7] et Riordan, Stein [55] repose sur l'identité suivante :

$$(5.16) \quad G_{2n+2} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} (k!)^2 T(n, k) ,$$

dans laquelle les nombres  $T(n, k)$  sont les nombres factoriels centraux (voir Riordan, [55] p. 212), nombres "proches" des nombres de Stirling de deuxième espèce  $S(n, k)$ .

Cette identité fut le point de départ de la découverte par Dumont [12], [13] de la première interprétation combinatoire des nombres de Genocchi par les pistolets surjectifs et les permutations de la proposition 5.5. En fait cette identité traduit un certain comptage des pistolets surjectifs par "inclusion-exclusion". La présentation adoptée ici simplifie l'article [13] et est un cas particulier de Viennot [68].

La preuve "bijective" de la conjecture de Gandhi est due à Françon, Viennot [33]. La symétrie ternaire fut découverte par Dumont, Foata [15]. Carlitz [8] donna une preuve analytique de la symétrie des polynômes  $F_n(x, y, z)$ . La présentation avec les triangles colorés surjectifs est nouvelle. Enfin la proposition 5.15 est due à Strehl [64].

### § 6. - Déterminants

Un autre moyen d'interpréter combinatoirement les nombres d'Euler et de Genocchi est de revenir directement aux séries génératrices (1.1), (1.2) et (1.4), écrites comme quotient de deux séries (dont les coefficients sont triviaux à interpréter). Il est bien connu (voir par exemple Muir [50]) que les coefficients

de la série quotient s'exprime comme des déterminants. Ceux-ci apparaissent alors comme des cas particuliers de la théorie combinatoire des déterminants développée par Gessel, Viennot [35], [36], [37]. En appliquant cette théorie générale, on retrouve alors pour les nombres d'Euler les permutations alternantes. Par contre, une nouvelle interprétation des nombres de Genocchi est déduite, apparemment sans rapport avec celles provenant des générations de Gandhi et Seidel.

### 6.1. - Déterminants et chemins

Nous rappelons (dans un cas très particulier mais qui sera suffisant ici) un théorème de Gessel, Viennot [35], [36].

Soit  $\Pi = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Un chemin de  $\Pi$  est une suite  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  de points  $s_i \in \Pi$ , appelés sommets du chemin, telle que pour tout  $i$ ,  $0 \leq i < n$ , on ait  $s_i = (x_i, y_i)$  avec  $s_{i+1} = (x_i, y_i - 1)$  ou  $s_{i+1} = (x_i + 1, y_i)$ . Nous dirons que le chemin  $w$  va de  $s_0$  à  $s_n$ .

Soient  $0 \leq a_1 < \dots < a_k$  et  $0 \leq b_1 < \dots < b_k$  deux suites d'entiers. Notons  $A_1, \dots, A_k$  et  $B_1, \dots, B_k$  les points  $A_i = (0, a_i)$  et  $B_i = (b_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . On peut alors énoncer :

PROPOSITION 6.1. - Le déterminant  $\det((\binom{a_i}{b_j})_{1 \leq i, j \leq k})$  est égal au nombre de  $k$ -uples de chemins de  $\Pi$ ,  $\Omega = (w_1, \dots, w_k)$  vérifiant les deux conditions suivantes

- (i) pour  $i \in [k]$ ,  $w_i$  est un chemin allant de  $A_i$  à  $B_i$ ,
- (ii) les chemins  $w_i$  sont deux à deux disjoints (c'est-à-dire sans sommets communs).

Notations. - Soit  $B = (b_{i,j})_{i,j \geq 0}$  la matrice (infinie) formée par les coefficients binomiaux :

$$b_{i,j} = \binom{i}{j} \text{ avec la convention } \binom{i}{j} = 0 \text{ si } j > i.$$

Le déterminant de la proposition 6.1 est le mineur extrait de  $B$ , formé des lignes d'indices  $a_1, \dots, a_k$  et des colonnes d'indices  $b_1, \dots, b_k$ . Nous le notons

$$B \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_k \\ b_1, \dots, b_k \end{pmatrix} = \det \left( \begin{pmatrix} a_i \\ b_j \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Remarquons que l'interprétation combinatoire ci-dessus démontre que ce déterminant est  $\geq 0$ .

Exemple 6.2. -

$$B \begin{pmatrix} 1, 3, 5, 7 \\ 0, 1, 3, 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 35 & 21 \end{vmatrix} = 272.$$

L'une des 272 configurations de chemins relatives à ce déterminant est visualisée dans la figure 12.

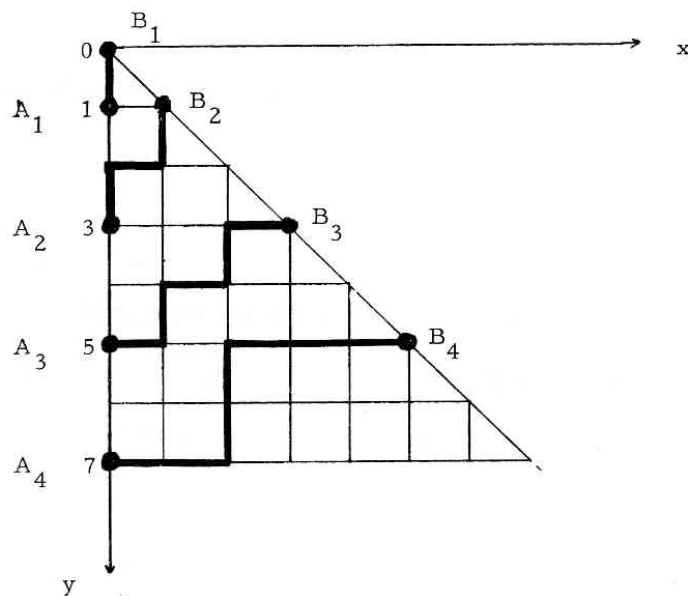


Figure 12 : Interprétation combinatoire du déterminant

$$B \begin{pmatrix} 1, 3, 5, 7 \\ 0, 1, 3, 5 \end{pmatrix}$$



6.2. - Déterminants et nombres d'Euler

En prenant les quotients  $\sin t / \cos t$  et  $1 / \cos t$ , on sait (voir Muir [50]) que

$$(6.1) \quad B \begin{pmatrix} 1, 3, \dots, 2n+1 \\ 0, 1, 3, \dots, 2n-1 \end{pmatrix} = E_{2n+1} \quad (\text{nombre tangent}),$$

$$(6.2) \quad B \begin{pmatrix} 1, 3, \dots, 2n-1, 2n \\ 0, 1, 3, \dots, 2n-3, 2n-1 \end{pmatrix} = E_{2n} \quad (\text{nombre sécant}).$$

Il s'agit de savoir si l'interprétation en chemins ne se coupant pas conduit à une nouvelle interprétation combinatoire des nombres d'Euler.

Nous donnons une bijection entre les configurations de chemins interprétant les déterminants (6.1) (resp. (6.2)) et les tables d'inversions des permutations alternantes sur  $[2n+1]$  (resp.  $[2n]$ ). Plus généralement, soient  $m > 0$  et une suite d'entiers  $0 < c_1 < \dots < c_k < m$ . Soit  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$  une configuration de chemins vérifiant la condition (i) de la proposition (6.1) pour le déterminant

$$B \begin{pmatrix} c_1, c_2, \dots, c_k, m \\ 0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_k \end{pmatrix}.$$

Il existe un et un seul "pas vertical" de la configuration entre les droites  $y = i-1$ ,  $y = i$ , pour  $i \in [m]$ . Notons  $f(i)$  l'abscisse de ce pas vertical. Il est clair que la fonction  $f = \xi(\Omega)$  est une fonction sous-excédante de  $\mathfrak{F}_m$  vérifiant la condition :

$$(6.3) \quad f(i) < f(i+1) \quad \text{pour tout } i \notin \{c_1, \dots, c_k\}.$$

Maintenant la condition (ii) de la proposition 6.1 est équivalente à dire

$$(6.4) \quad f(i) \geq f(i+1) \quad \text{pour tout } i \in \{c_1, \dots, c_k\}.$$

Ainsi  $\xi$  est une bijection entre les configurations  $\Omega$  interprétant le déterminant

$$B \begin{pmatrix} c_1, c_2, \dots, c_k, m \\ 0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_k \end{pmatrix}$$

et les fonctions  $f \in \mathfrak{F}_m$  vérifiant les deux conditions (6.3) et (6.4).

En considérant  $f$  comme la table d'inversion  $I(\sigma)$  de la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ , on obtient une bijection entre ces configurations  $\Omega$  et les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  dont l'ensemble des indices des montées est exactement  $\{c_1, \dots, c_k\}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 6.3.** - Soit  $m \geq 1$  et  $\{c_1 < \dots < c_k\}$  une partie (éventuellement vide) du segment  $[1, m-1]$ . Le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_m$  ayant cette partie comme ensemble d'indices de montées est égal au déterminant

$$B \begin{pmatrix} c_1, c_2, \dots, c_k, m \\ 0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_k \end{pmatrix}.$$

Dans le cas des déterminants (6.1) et (6.2) on retrouve donc bien les permutations alternantes "montantes" (sections 3.1 et 3.2).

Remarquons que l'on pourrait aussi bien prendre les permutations alternantes "descendantes" (voir section 3.2) et démontrer ainsi les relations :

$$(6.5) \quad B \begin{pmatrix} 2, 4, \dots, 2n, 2n+1 \\ 0, 2, \dots, 2n-2, 2n \end{pmatrix} = E_{2n+1},$$

$$(6.6) \quad B \begin{pmatrix} 2, 4, \dots, 2n \\ 0, 2, \dots, 2n-2 \end{pmatrix} = E_{2n}.$$

**Exemple 6.4.** - La configuration  $\Omega$  de la figure 12 est en fait relative à un déterminant du type (6.1). Il vient  $f = \xi(\Omega) = 0102122$ , table d'inversion de la permutation alternante (montante)  $\sigma = I^{-1}(f) = 5716243$ .

### 6.3. - Déterminants et nombres de Genocchi

D'une manière analogue que pour les nombres d'Euler, on déduit de la série génératrice des nombres de Genocchi l'identité suivante (voir Muir [50])

$$(6.7) \quad B \begin{pmatrix} 2, 4, 6, \dots, 2n+2 \\ 0, 1, 3, \dots, 2n-1 \end{pmatrix} = 2^n n! G_{2n+2}.$$

La figure 13 donne une configuration possible pour ce type de déterminant.

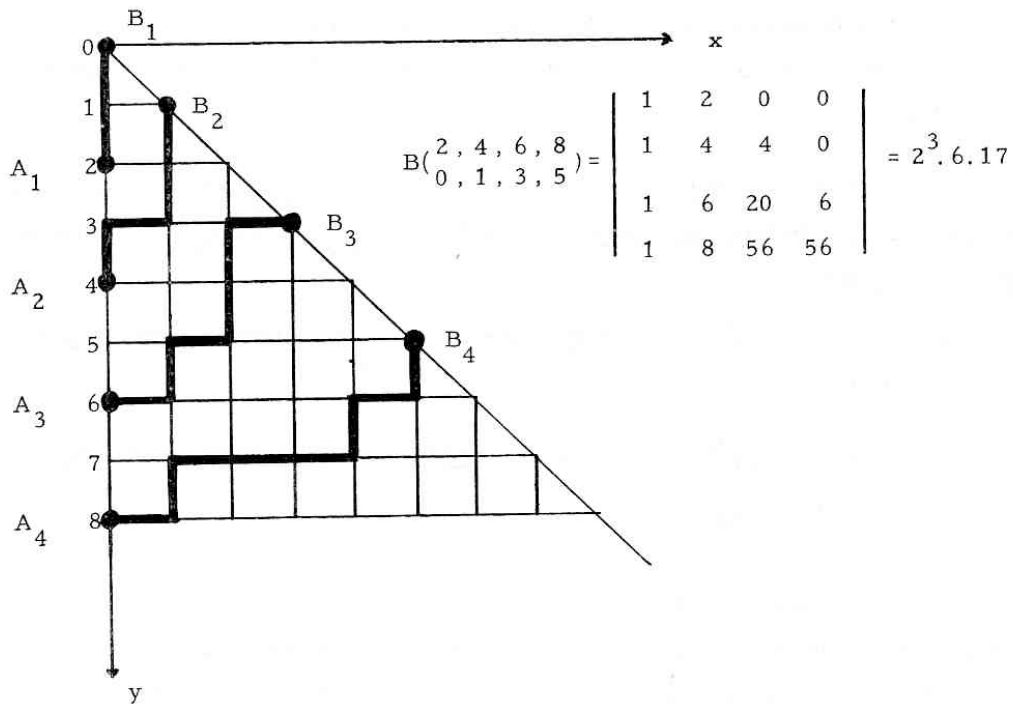


Figure 13 : Interprétation combinatoire du

déterminant  $B \begin{pmatrix} 2, 4, 6, 8 \\ 0, 1, 3, 5 \end{pmatrix} = 816$ .

On peut faire un codage analogue à la bijection  $\xi$  définie en 6.2. Soit  $\Omega$  une configuration de chemins vérifiant la condition (i) de la proposition 6.1 et relative au déterminant (6.7). Pour tout  $i \in [2n+2]$  impair ou égal à  $2n+2$  (resp. pair et différent de  $2n+2$ ) il existe un (resp. deux) "pas verticaux" des chemins de  $\Omega$  compris entre les droites  $y=i$  et  $y=i-1$ . En prenant les abscisses de ces pas verticaux, on associe deux fonctions sous-excédantes  $f \in \mathfrak{F}_{2n+2}$  et  $g \in \mathfrak{F}_{2n+1}$ . Le lecteur comprendra le codage par l'exemple de la figure 13.

Ici  $f = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} 4 1$   
 $g = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} 4$

Les valeurs entourées correspondent aux indices pairs  $\neq 2n+2$  (deux pas verticaux).

Comme pour le cas des nombres d'Euler, la condition (ii) de non croisement se traduit sur  $f$  et  $g$  par des relations analogues à (6.3) ou (6.4). On peut alors déduire

COROLLAIRE 6.5. - Pour  $n \geq 1$ , le nombre  $2^n n! G_{2n+2}$  est le nombre de couples  $(f, g)$  de fonctions sous-excédantes  $f \in \mathfrak{F}_{2n+2}$ ,  $g \in \mathfrak{F}_{2n+1}$ , vérifiant les trois conditions

- (i)  $f$  est la table d'inversion d'une permutation alternante descendante de  $\mathfrak{S}_{2n+2}$ ,
- (ii)  $g$  est la table d'inversion d'une permutation alternante montante de  $\mathfrak{S}_{2n+1}$ ,
- (iii)  $f(i) = g(i)$  pour tout  $i$  impair de  $[2n+1]$ .

Il ne semble pas commode de simplifier cette interprétation, encore moins d'expliquer la divisibilité par  $2^n n!$ . Néanmoins on pourra appliquer à ce cas particulier un codage de Gessel, Viennot [36] en termes de tableaux de Young.

#### 6.4. - Inversions de matrices de coefficients binomiaux

Nous donnons un exemple d'utilisation de la proposition 6.1 afin de donner une interprétation combinatoire des coefficients de l'inverse de certaines matrices formées de coefficients binomiaux.

Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j \geq 1}$  la matrice (infinie) dont les coefficients sont :

$$(6.8) \quad a_{i,j} = \binom{i}{2i-2j} \quad \text{pour } i, j \geq 1.$$

On cherche une interprétation combinatoire des coefficients de l'inverse de  $A$  :

$$A^{-1} = ((-1)^{i+j} c_{i,j})_{i,j \geq 1}.$$

Pour  $i$  et  $j \geq 1$ , soient  $A_i$  et  $B_j$  les points de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  définis par (voir figure 14)

$$(6.9) \quad A_i = (i-1, 2i-1), \quad B_j = (2j-1, 2j-1).$$

Le nombre de chemins (au sens du début de la section 6.1) allant de  $A_i$  à  $B_j$  est égal à  $a_{i,j}$ .

Pour  $n \geq 1$ , notons  $A_n$  la matrice (finie) obtenue en prenant les  $n$  premières lignes et colonnes de  $A$ . Pour  $k$  et  $\ell \geq 1$ , le coefficient  $c_{k,\ell}$  est le cofacteur d'indice  $(\ell, k)$  de la matrice  $A_n$ , et ceci pour tout  $n \geq \max(k, \ell)$ .

La théorie générale de [35] peut à nouveau s'appliquer pour ce déterminant. Il vient :

PROPOSITION 6.6. - Soient  $1 \leq \ell \leq k$  et  $n \geq k$ . Le coefficient  $c_{k,\ell}$  de l'inverse de la matrice  $A$  définie par (6.8) est le nombre de configurations de chemins  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  vérifiant les deux conditions :

- (i)  $\omega_i$  joint  $A_i$  à  $B_i$  pour  $1 \leq i < \ell$  ou  $k \leq i \leq n$   
 $\omega_i$  joint  $A_{i+1}$  à  $B_i$  pour  $\ell \leq i < k$ ,
- (ii) les chemins  $\omega_1, \dots, \omega_n$  sont deux à deux disjoints.

Exemple 6.7. -  $\ell = 3$ ,  $k = 6$ ,  $n = 7$ . Une configuration possible est donnée par la figure 14.

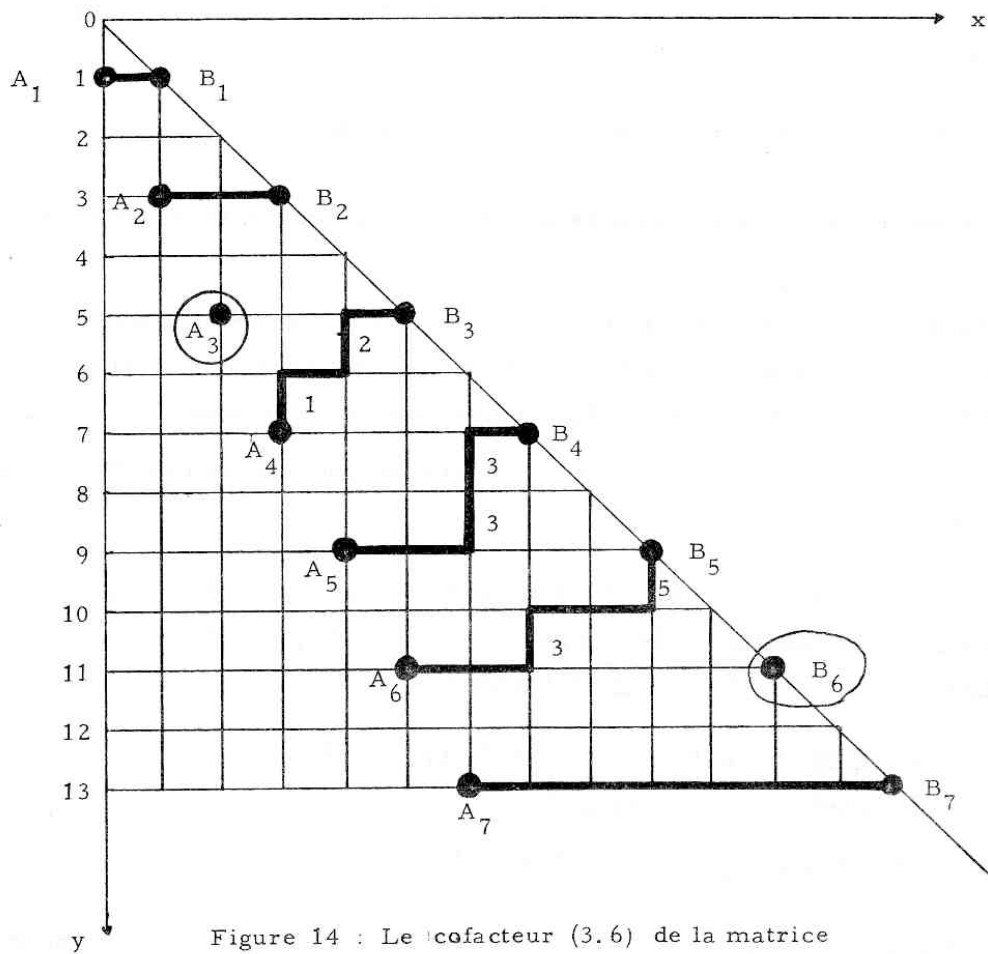


Figure 14 : Le cofacteur (3.6) de la matrice

$$A_7 = ((\binom{i}{2i-2j}))_{1 \leq i, j \leq 7}$$

Ces configurations  $\Omega$  vérifient une condition analogue à celle de la section 6.2 permettant de construire la bijection  $\xi$ . Nous les codons d'une manière légèrement différente.

Pour  $i, 1 \leq i < k$ , le chemin  $w_i$  a deux pas verticaux. A chacun de ces pas on associe un nombre  $v$  compris entre 1 et  $i$ . Si l'abscisse du pas est  $x_0$ , alors  $v = x_0 - i + 1$  (voir figure 14). On définit la fonction  $p : [2n-2] \rightarrow [0, n-1]$  par la condition

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} - p(i) = 0 \text{ s'il n'existe pas de pas verticaux entre les droites} \\ \quad y = i, \quad y = i+1, \\ - p(i) = v \text{ si } v \text{ est le nombre associé au pas vertical compris} \\ \quad \text{entre } y = i, \quad y = i+1. \end{array} \right.$$

Par exemple, pour la configuration de la figure 14,  $p = 000021335300$ .

Par construction,  $p(2i-1) \geq p(2i)$  pour tout  $i \in [n-1]$ . Maintenant la condition de non-croisement des chemins est équivalente à

$$(6.11) \quad p(2i) \leq p(2i+1) \quad \text{pour tout } i, \quad \ell \leq i < k-1.$$

Nous avons ainsi une bijection entre les configurations  $\Omega$  de la proposition 6.6 et ce que l'on pourrait appeler les pistolets alternants tronqués. Plus précisément nous énonçons :

COROLLAIRE 6.8. - Pour  $0 \leq \ell \leq k$ , le coefficient  $c_{k+1, \ell+1}$  de l'inverse de la matrice  $A$  définie par (6.8) est le nombre de pistolets alternants de  $[2k]$  tronqués à l'indice  $2\ell$ , c'est-à-dire les applications  $p : [2k] \rightarrow [0, k]$  vérifiant les trois conditions :

- (i)  $p(2i-1) = p(2i) = 0$  pour  $1 \leq i < \ell$ ,
- (ii)  $p(2i-1) \leq i$  et  $p(2i) \leq i$  pour  $\ell \leq i \leq k$ ,
- (iii)  $p(2i) \leq p(2i+1) \geq p(2i+2)$  pour  $1 \leq i < k$ .

En particulier, on retrouve les pistolets alternants de la section 4.3 dans le cas  $\ell = 0$ .

COROLLAIRE 6.9. - Pour  $n \geq 1$ , le coefficient  $c_{n, 1}$  de l'inverse de la matrice  $A$  définie par (6.8) est le nombre de Genocchi  $G_{2n}$ .

Comme pour le cas des nombres de Genocchi, on peut calculer  $c_{k, \ell}$  par un tableau de nombres analogue au "pistolet de Genocchi" de la table 5. La table 8 est le cas  $c_{6, 3}$ . Ce nombre est la somme des éléments de la dernière colonne, soit :

$$c_{6, 3} = 216 + 196 + 159 + 110 + 55 = 736$$

				55	55
		6	6	55	110
1	1	6	12	49	159
1	2	5	17	37	196
1	3	3	20	20	216

Table 8 : Calcul du cofacteur  $c_{6,3} = 736$ 

### Références bibliographiques

La théorie combinatoire des déterminants utilisée ici est développée d'une manière générale dans Gessel, Viennot [35], [36], [37]. Le corollaire 6.8 est démontré (de manière analytique) dans Gessel, Viennot [38]. Le corollaire 6.9 a été également découvert, de manière indépendante, par Kreweras [44]. Le corollaire 6.3 est une des formules connues pour le nombre de permutations ayant une forme donnée (voir Mac Mahon [48], Niven [52]). Nous en avons ainsi donné ici la (première) démonstration bijective. Signalons enfin que les déterminants binomiaux

$$B \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_k \\ b_1, \dots, b_k \end{pmatrix}$$

apparaissent en géométrie algébrique comme les coefficients du calcul des classes de Chern d'un produit tensoriel (en effectuant ce calcul selon la base des fonctions symétriques constituée par les fonctions de Schur), voir Lascoux [47]. La proposition 6.1 donne ainsi une preuve combinatoire de leur positivité. Des déterminants similaires sont interprétés et étudiés combinatoirement par Dulucq [11].



## § 7. - Fractions continuées

Plusieurs fois, nous avons annoncé être très proche de certains développements en fractions continuées (identités (3.3), (3.5) ou (4.18)). Nous appliquons la théorie combinatoire des fractions continuées de Flajolet [21] au cas particulier des nombres d'Euler et de Genocchi. Nous n'obtenons pas de nouvelles interprétations combinatoires de ces nombres, mais plutôt une preuve entièrement combinatoire du développement en fraction continuée de leur série génératrice ordinaire. Par contre, nous verrons, au paragraphe 8, que le cas des fonctions elliptiques conduit à une interprétation combinatoire de ces fonctions sans rapport avec celles obtenues par des méthodes analogues au paragraphe 4.

### 7.1. - Fractions continuées et chemins valués

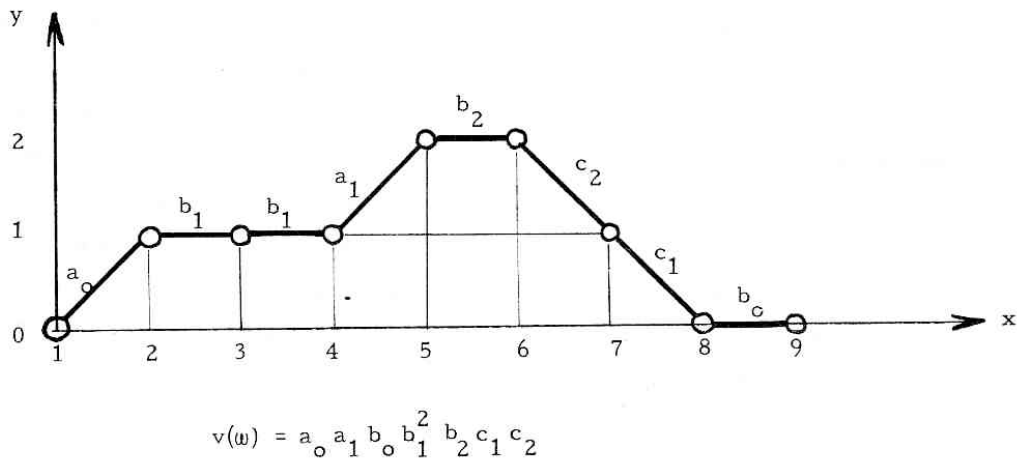
Soit  $K$  un anneau commutatif unitaire. (Ici  $K = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}[q]$ .)

DÉFINITION 7.1. - Un chemin de Motzkin valué est un chemin de Motzkin

$w = (s_0, \dots, s_n)$  (voir définition 2.15 et la suite) tel que chaque pas élémentaire  $(s_i, s_{i+1})$  est valué par un élément de  $K$  ne dépendant que de la nature de ce pas (Nord-Est, Est ou Sud-Est) et de l'ordonnée (ou "hauteur", ou aussi "niveau") de son point de départ  $s_i$ .

En somme la valuation des pas élémentaires est entièrement déterminée par la donnée de trois suites de  $K$  :  $(a_k)_{k \geq 0}$  (resp.  $(b_k)_{k \geq 0}$ , resp.  $(c_k)_{k \geq 1}$ ) pour les pas Nord-Est (resp. Est, resp. Sud-Est) à hauteur  $k$ . La valuation  $v(w)$  du chemin de Motzkin  $w = (s_0, \dots, s_n)$  est définie comme le produit des valuations des pas élémentaires  $(s_i, s_{i+1})$  de  $w$ . La longueur du chemin est le nombre  $n$  de pas élémentaires.

La valuation du chemin de la figure 3 (exemple 2.16) est donnée sur la figure 15.

Figure 15 : Valuation d'un chemin de Motzkin  $w$ 

DÉFINITION 7.2. - (Ici  $K = \mathbb{Z}$  avec valuation  $\geq 0$ .) Soit  $(a_k)_{k \geq 0}$ ,  $(b_k)_{k \geq 0}$ ,  $(c_k)_{k \geq 1}$  une valuation des chemins de Motzkin. Une histoire (de longueur  $n$ ) est un couple  $h = (w, g)$  dans lequel  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  est un chemin de Motzkin (de longueur  $n$ ) de valuation non nul et  $g : [n] \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $1 \leq g(i) \leq v(s_{i-1}, s_i)$ , (valuation du pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$ ) pour  $i \in [n]$ .

Exemples 7.3. - Soit  $\gamma$  la fonction de Motzkin associée au chemin  $w = (s_0, \dots, s_n)$  (voir définition 2.15).

Prenons  $a_k = b_k = c_k = k+1$  pour tout  $k \geq 0$ . La valuation de  $w$  est le nombre de fonctions  $f : [n+1] \rightarrow [n+1]$  dominées par  $\gamma$  (c'est-à-dire  $1 \leq f(i) \leq \gamma(i)$  pour  $i \in [n+1]$ ).

Prenons  $a_k = c_k = k+1$  et  $b_k = 2(k+1)$ . La valuation  $v(w)$  est maintenant le nombre de couples  $(\gamma_c, f) \in T_n$  (voir définition à la proposition 2.20) associés à la fonction de Motzkin  $\gamma$ . Un tel couple, que nous avons appelé par abus de

langage "chemin valué", peut être identifié à une histoire. La proposition 2.20 affirme que, pour cette valuation, le nombre d'histoires de longueur  $n$  est  $(n+1)!$ .

Nous utiliserons le théorème fondamental suivant :

PROPOSITION 7.4. - Soient  $(a_k)_{k \geq 0}$ ,  $(b_k)_{k \geq 0}$ ,  $(c_k)_{k \geq 1}$  trois suites d'éléments de l'anneau  $\mathbb{K}$ . La série génératrice des valuations des chemins de Motzkin de longueur  $n$  admet le développement en fraction continuée :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{\omega \\ \text{chemin de} \\ \text{Motzkin de} \\ \text{longueur } n}} v(\omega) t^n = \frac{1}{1 - c_0 t - \frac{a_0 c_1 t^2}{1 - c_1 t - \frac{a_1 c_2 t^2}{\ddots \frac{1 - c_k t - \frac{a_k c_{k+1} t^2}{1 - \dots}}}}}$$

#### 7.2. - Interprétation combinatoire de quelques développements en fractions continuées

En appliquant la proposition 7.4. à la deuxième valuation de l'exemple 7.3, on obtient alors une preuve "bijective" (grâce à la proposition 2.20) de l'identité :

$$(7.1) \quad \sum_{n \geq 0} (n+1)! t^n = \frac{1}{1 - 2t - \frac{1 \cdot 2t^2}{1 - 4t - \frac{2 \cdot 3t^2}{\dots}}}$$

En appliquant la bijection  $\theta$  de la proposition 2.20 aux permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$  telles que  $\sigma(n+1) = n+1$ , on obtiendrait :

$$(7.2) \quad \sum_{n \geq 0} n! t^n = \frac{1}{1 - t - \frac{1^2 t^2}{1 - 3t - \frac{2^2 t^2}{\dots}}}$$

Revenons aux nombres d'Euler et de Genocchi. Les permutations alternantes et les bijections mises en œuvre pour démontrer (3.3) et (3.5) nous permettent alors d'énoncer :

$$(7.3) \quad \sum_{n \geq 0} E_{2n+1} t^{2n+1} = \frac{t}{1 - \frac{1 \cdot 2 t^2}{1 - \frac{2 \cdot 3 t^2}{1 - \frac{3 \cdot 4 t^2}{\dots}}}}$$

En effet, comme dans le cas de l'exemple 7.3, l'identité (3.3) revient à dire que le nombre tangent  $E_{2n+1}$  est le nombre d'histoires de longueur  $2n$  pour la valuation suivante :

$$a_k = k+1, \quad b_k = 0, \quad c_k = k+1.$$

Dans le cas des nombres sécants de l'identité (3.5), il suffit de prendre

$$a_k = k+1, \quad b_k = 0, \quad c_k = k \quad \text{pour avoir}$$

$$(7.4) \quad \sum_{n \geq 0} E_{2n} t^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{1 \cdot 2 t^2}{1 - \frac{2 \cdot 3 t^2}{1 - \frac{3 \cdot 4 t^2}{\dots}}}}$$

Le cas des nombres de Genocchi a été préparé par l'identité (4.18), dérivée des pistolets alternants. La valuation correspondante est :

$$a_k = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil, \quad b_k = 0, \quad c_k = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil.$$

On déduit

$$(7.5) \quad \sum_{n \geq 1} G_{2n} t^{2n} = \frac{t^2}{1 - \frac{1 \cdot 1 t^2}{1 - \frac{1 \cdot 2 t^2}{1 - \frac{2 \cdot 2 t^2}{1 - \frac{2 \cdot 3 t^2}{\dots}}}}}$$

Le développement des fonctions elliptiques de Jacobi est étudié au paragraphe suivant.

Références bibliographiques

La proposition 7.4 est due à Flajolet [21], dans lequel on trouvera un exposé de la théorie combinatoire des développements en fractions continuées. Cette théorie est reprise et amplifiée dans Viennot [70]. Le développement (7.5) semblerait nouveau.

§ 8. - Fonctions elliptiques de Jacobi

Nous ne donnerons qu'un très bref aperçu de leur théorie combinatoire.

Les fonctions elliptiques de Jacobi, notées habituellement  $sn$ ,  $cn$  et  $dn$  peuvent être définies de la façon suivante :

Soit  $\alpha$  un nombre réel compris entre 0 et 1. Notons  $u$  l'intégrale

$$(8.1) \quad u = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-\alpha^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} .$$

La fonction réciproque  $\varphi(u) = \text{am } u$  est appelée l'amplitude de  $u$ . On pose alors

$$(8.2) \quad sn(u, \alpha) = \sin \varphi, \quad cn(u, \alpha) = \cos \varphi \quad \text{et} \quad dn(u, \alpha) = (1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} .$$

Ces fonctions sont les solutions du système différentiel suivant :

$$(8.3) \quad \begin{cases} sn'(u, \alpha) = cn(u, \alpha) dn(u, \alpha) , \\ cn'(u, \alpha) = -sn(u, \alpha) dn(u, \alpha) , \\ dn'(u, \alpha) = -\alpha^2 sn(u, \alpha) cn(u, \alpha) , \\ sn(0, \alpha) = 0, \quad cn(0, \alpha) = 1, \quad dn(0, \alpha) = 1 . \end{cases}$$

En écrivant :

$$(8.4) \quad \begin{cases} sn(u, \alpha) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n J_{2n+1}(\alpha) \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} , \\ cn(u, \alpha) = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n J_{2n}(\alpha) \frac{u^{2n}}{(2n)!} , \\ dn(u, \alpha) = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \alpha^{2n} J_{2n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{u^{2n}}{(2n)!} . \end{cases}$$

On définit des polynômes pairs  $J_{2n+1}(\alpha)$  et  $J_{2n}(\alpha)$ , à coefficients entiers positifs, de degré respectifs  $2n$  et  $2n-2$ . Rassemblant les deux cas en un seul, notons :

$$(8.5) \quad J_m(\alpha) = \sum_{0 \leq 2p \leq m-1} J_{m,2p} \alpha^{2p}, \quad m \geq 1.$$

Comme on a

$$(8.6) \quad \operatorname{tg} u + \frac{1}{\cos u} = -i \operatorname{sn}(iu, 1) + \operatorname{cn}(iu, 1)$$

on déduit que la somme des coefficients  $J_{m,2p}$  du polynôme  $J_m(\alpha)$  est le nombre d'Euler  $E_m$ . Le problème est donc de trouver un paramètre, défini sur l'une des interprétations combinatoires des nombres d'Euler, afin d'interpréter l'entier  $J_{m,2p}$ .

Les premières valeurs de ces entiers sont données dans les tables 9 et 10.

$2n+1$	$\alpha^0$	$\alpha^2$	$\alpha^4$	$\alpha^6$	$\alpha^8$	$E_{2n+1}$
1	1					1
3	1	1				2
5	1	14	1			16
7	1	135	135	1		272
9	1	1 228	5 478	1 228	1	

Table 9 : Coefficients de  $\operatorname{sn}$

$2n$	$\alpha^0$	$\alpha^2$	$\alpha^4$	$\alpha^6$	$\alpha^8$	$E_{2n}$
2	1					1
4	1	4				5
6	1	44	16			61
8	1	408	912	64		1 385
10	1	3 688	30 768	15 808	256	50 521

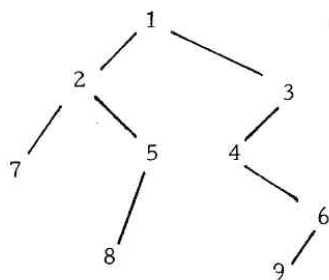
Table 10 : Coefficients de  $\operatorname{cn}$

Pour  $\alpha = 1$ , le système (8.3) se réduit (au signe près) au système (3.6) interprété par les permutations de Jacobi. D'une manière analogue à la preuve des propositions 3.3, 3.9 et 3.15 (interprétant respectivement les systèmes différentiels (3.1), (3.6) et (3.10)), on démontre la proposition suivante :

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  et  $x \in [m]$ , notons  $hd_\sigma(x)$  la hauteur à droite de  $x$  dans l'arbre binaire  $\delta(\sigma)$  associé à  $\sigma$  par (2.7). Rappelons que la hauteur à droite de  $x$  dans  $\delta(\sigma)$  est le nombre d'arêtes à droite rencontrées en parcourant l'unique chemin allant de la racine à  $x$ .

**PROPOSITION 8.1.** - Le coefficient  $J_{m, 2p}$  du développement des fonctions elliptiques  $sn$  et  $cn$  est le nombre de permutations de Jacobi (définition 3.7) ayant  $2p$  éléments  $x \in [m]$  avec une hauteur à droite  $hd_\sigma(x)$  impaire.

**Exemple 8.2.** - La permutation de Jacobi  $\sigma = 728514963$  a pour déployé  $\delta(\sigma)$  l'arbre de la figure 16



hauteur 0 : 1, 2, 7  
 hauteur 1 : 3, 4, 5, 8  
 hauteur 2 : 6, 9

Figure 16.

Il y a ainsi 4 éléments avec hauteurs impaires et  $\sigma$  est l'une des 5478 permutations contribuant à  $J_{9,4}$ .

En appliquant la bijection  $\eta : \mathfrak{S}_m \rightarrow \mathfrak{F}_m$  définie par (2.9), on obtient un raffinement de la proposition 3.12.

**COROLLAIRE 8.3.** - Le coefficient  $J_{m, 2p}$  est le nombre de forêts d'arbres croissants sur  $m$  telles que chaque sommet ait un degré pair, et ayant  $2p$  sommets avec une hauteur impaire.

La génération donnée par Schett [58], [59] des polynômes  $J_m(\alpha)$  permet de donner une deuxième interprétation combinatoire des fonctions elliptiques.

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_m$  et  $\sigma^{-1}$  son inverse. Un pic de cycle de  $\sigma$  est un entier  $x$  tel que

$$(8.7) \quad 2 \leq x \leq m, \quad \sigma(x) \neq x, \quad \sigma(x) < x \quad \text{et} \quad \sigma^{-1}(x) < x.$$

PROPOSITION 8.4. - Le coefficient  $J_{2n+1, 2p}$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_{2n}$  (ou de  $\mathfrak{S}_{2n+1}$ ) ayant  $p$  pics de cycles pairs et aucun impairs. Le coefficient  $J_{2n, 2p}$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_{2n-1}$  (ou de  $\mathfrak{S}_{2n}$ ) ayant  $p$  pics de cycles impairs et aucun pairs.

COROLLAIRE 8.5. - Le nombre d'Euler  $E_m$ ,  $m \geq 1$ , est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_m$  (ou de  $\mathfrak{S}_{m-1}$ ) n'ayant aucun pic de cycles de la même parité que  $m$ .

Une troisième interprétation des fonctions elliptiques peut être obtenue à partir du développement en fraction continuée de leurs transformées de Laplace.

Dans le cas de  $c_n$ , on a

$$\int_0^\infty e^{-t} c_n(tu, \alpha) dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n J_{2n}(\alpha) u^{2n} = \frac{1}{1 + \frac{2^2 \alpha^2 u^2}{1 + \frac{2^2 \alpha^2 u^2}{1 + \frac{3^2 u^2}{1 + \frac{2^2 \alpha^2 u^2}{\dots}}}}}$$

D'après la proposition 7.4 et la relation (3.5), on déduit

COROLLAIRE 8.6. - Le coefficient  $J_{2n, 2p}$  est le nombre de permutations alternantes ayant  $p$  creux pairs.

Ce corollaire peut aussi se déduire de l'interprétation issue de la génération de Schett (proposition 8.4). Il ne semble pas qu'il existe de bijection simple entre la génération issue du système différentiel et celle issue du développement en fraction continuée. D'autre part, il n'y a pas d'analogue du corollaire 8.6 pour la fonction  $s_n$  (voir à ce sujet les permutations "bégayantes" de Flajolet, Françon [22]).



Références bibliographiques

André s'est intéressé très tôt à la combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi [1], [2]. Sous l'impulsion de Schützenberger, le sujet fut repris, avec les interprétations de Viennot [67] (proposition 8.1), Dumont [16] (proposition 8.4) et Flajolet [21] (corollaire 8.6). Pour plus de détails sur ce sujet commençant seulement à être découvert, on verra Dumont [18], [19].

§ 9. - Problèmes ouverts

Nous donnons une liste de questions ouvertes, ainsi que quelques résultats partiels (sans démonstration) relatifs à ces problèmes. Les preuves, ainsi que d'autres résultats et constatations expérimentales, seront regroupés dans une publication ultérieure. Nous avons écarté ici les très nombreux problèmes relatifs aux interprétations combinatoires des fonctions elliptiques de Jacobi.

Problème 1. - Donner une preuve bijective de l'identité (1.6)

$$2^{2n} G_{2n+2} = (n+1) E_{2n+1} \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

Comme nous l'avons vu, ceci est équivalent à donner une preuve bijective de l'interprétation de Strehl (proposition 5.15), ou encore du corollaire 5.17. Ce dernier peut aussi se ramener (bijectivement) à la propriété suivante.

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_{2n+1}$  et  $f$  sa table d'inversion. Nous dirons que  $\sigma$  (ou  $f$ ) est pseudo-alternante si et seulement si on a la condition suivante

$$(9.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{Pour tout } i \text{ impair de } [2n], \quad g(i) \geq g(i+1) \text{ ou bien} \\ \quad \quad \quad g(i+1) = 1 + g(i) \text{ avec } g(i) \text{ impair.} \\ - \text{Pour tout } i \text{ pair de } [2n], \quad g(i) < g(i+1) \text{ et dans le cas où } g(i) \\ \quad \quad \quad \text{est impair alors } 1+g(i) < g(i+1). \end{array} \right.$$

Le problème revient alors à trouver une bijection entre les permutations pseudo-alternantes et les alternantes.

En utilisant la bijection  $\theta : T_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$  de la proposition 2.20, on peut démontrer (en utilisant le corollaire 4.15) que le problème 1 est équivalent à trouver une bijection  $\varphi$  des permutations alternantes sur elles-mêmes ayant la propriété suivante :

le nombre d'éléments saillants de la permutation alternante  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}$  est égal au nombre de valeurs impaires  $x$  de  $[2n+1]$  telles que  $f(x) = 1$ , en désignant par  $(\gamma_c, f)$  le couple  $\theta^{-1}(\varphi(\sigma))$ .

Une troisième façon d'aborder le problème est aussi d'interpréter  $2(n+1)E_{2n+1}$  comme le nombre de permutations alternantes de  $\mathfrak{S}_{2n+3}$  ayant deux éléments saillants. En passant aux tables d'inversions, c'est aussi le nombre de fonctions  $f : [2n+1] \longrightarrow [0, 2n+1]$  telles que  $0 \leq f(i) \leq i$  ( $i \in [2n+1]$ ) et qui sont "alternantes". C'est aussi le nombre de fonctions sous-excédantes  $g : [2n+2] \longrightarrow [0, 2n+1]$  telles que  $g(i) \geq g(i+1)$  pour  $i$  pair  $\geq 2$  et  $g(i) < g(i+1)$  pour  $i$  impair  $\geq 3$ .

Ainsi  $2(n+1)E_{2n+1} = 2^{2n+1} G_{2n+2}$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_{2n+2}$  ayant soit la forme  $+ - + - + \dots$  (alternante montante), soit la forme  $- - + - + \dots$  (!).

Problème 2. - Donner une interprétation combinatoire des nombres de Genocchi sur laquelle la symétrie ternaire est "évidente".

Pour les psitolets surjectifs, aucun des 3 paramètres de la proposition 5.8 ne jouent le même rôle. Avec les "triangles colorés" de la définition 5.9 la symétrie entre deux des paramètres devient "évidente". Mais ces objets ne possèdent pas une symétrie ternaire naturelle (comme par exemple la symétrie par rapport aux trois hauteurs du triangle). En "décolorant" les "triangles surjectifs colorés", on obtient un objet ayant la symétrie ternaire, mais il n'est plus dénombré par les nombres de Genocchi. On pourrait faire intervenir la multiplicité avec laquelle apparaît chacun de ces triangles décolorés. Cette multiplicité peut être explicitée, mais sa définition ne possède pas la symétrie ternaire (par rapport aux trois hauteurs du triangle).

On peut aussi penser à une interprétation dans l'espace. Soit  $P_n = [n] \times [n] \times [n]$  l'ensemble des points  $(x, y, z)$  ordonnés par l'ordre produit  $x \leq x', y \leq y', z \leq z'$ . On considère l'ensemble  $S_n$  des configurations  $\eta$  de points de  $P_n$  ayant un et un seul point  $(x, y, z)$  dans chaque "direction" de plan, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$(9.2) \quad (x, y, z) \in \eta, (x, y', z') \in \eta \Rightarrow y = y' \text{ et } z = z',$$

ainsi que les deux autres conditions obtenues par la symétrie ternaire échangeant les variables  $x, y$  et  $z$ . Les projections de  $\eta \in S_n$  sur les faces du cube  $P_n$  sont des ensembles de points, graphes  $\{(i, \sigma(i)), i \in [n]\}$  de trois permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Il est aisé de voir que  $\eta$  est codé par deux quelconques de ces permutations. Ainsi le cardinal de  $S_n$  est  $n! \times n!$ .

On considère maintenant l'ensemble  $A_n$  des antichaînes de  $S_n$ , c'est-à-dire les éléments  $\eta \in S_n$  formés de points deux à deux incomparables pour l'ordre de  $P_n$ .

Ces objets possèdent évidemment la symétrie ternaire (échangeant les coordonnées  $x, y$  et  $z$ ). Il en est de même des trois paramètres que l'on peut définir en prenant le nombre d'éléments saillants (inférieur gauche) de chacune des trois permutations projections.

Il est intrigant de constater que le cardinal de  $A_n$  est pour  $n = 1, 2, 3, 4$  respectivement  $|A_n| = 1, 3, 17, 153$  (non ce n'est pas une erreur, il faut lire 153 et non 155 !). D'autre part la distribution selon les trois paramètres définis ci-dessus coïncide exactement avec celle des trois paramètres de la symétrie ternaire des nombres de Genocchi, pour  $n = 1, 2, 3$ .

Problème 3. - Donner une bijection "directe" entre les pistolets surjectifs et les pistolets alternants.

On peut constater que les pistolets alternants  $p$  possèdent une symétrie ternaire par rapport aux trois paramètres suivants :

$$(9.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(p) \text{ le nombre d'indices } i \text{ avec } p(2i-1) = i, \\ b(p) \text{ le nombre d'indices } i \text{ avec } p(2i) = 1, \\ c(p) \text{ le nombre d'indices } i \text{ impairs avec} \\ \quad p(i+1) = p(i) \text{ ou } p(i-1) = p(i). \end{array} \right.$$

La bijection de la section 5.3, prouvant la conjecture de Gandhi, est d'une part très indirecte, et d'autre part ne conserve pas les paramètres des symétries ternaires des pistolets surjectifs et alternants. Il manque une bijection directe conservant la symétrie ternaire. Peut-on aussi demander que cette bijection transforme les pistolets surjectifs croissants en les pistolets alternants croissants (classes de pistolets dénombrées toutes deux par le nombre de Catalan, comme l'a remarqué Dumont).

On peut aussi essayer de s'inspirer de la preuve analytique de la conjecture de Gandhi [7], [56]. Le lecteur constatera que l'on se rapproche alors du problème 1.

Problème 4. - Etude des nombres "médiants de Genocchi".

Définissons le nombre médian de Genocchi par

$$(9.4) \quad M G_{2n+1} = |g_{n, n+1}| \quad (\text{pour } n \geq 0)$$

en désignant par  $(g_{k, n})$  la matrice de Seidel des nombres de Genocchi introduite en (4.5).

.. , Les premières valeurs sont données dans la table 1.

2n+1	1	3	5	7	9	11	13	15
MG <sub>2n+1</sub>	1	1	2	8	56	608	9 440	198 272
divisibilité par 2	1	1	2.1	2 <sup>3</sup> .1	2 <sup>3</sup> .7	2 <sup>5</sup> .19	2 <sup>5</sup> .295	2 <sup>7</sup> .1549

Table 1

D'après la section 4.3, il est clair que  $GM_{2n+1}$  est le nombre de pistolets alternants sur  $2n-1$ . C'est aussi le nombre de permutations alternantes sur  $2n$  ayant une table d'inversion à valeur paire. En appliquant le lemme 4.14, on a l'analogie du corollaire 4.15, c'est-à-dire :

$$(9.5) \quad GM_{2n+1} = \sum_{\gamma} v(\gamma)$$

la somme est étendue à tous les chemins de Dyck de longueur  $2n$ ,  $v$  est la valuation (au sens de la définition 7.1) définie par les relations

$$(9.6) \quad \begin{cases} a_k = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor & (\text{pas Nord-Est à hauteur } k), \\ c_k = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor & (\text{pas Sud-Est à hauteur } k). \end{cases}$$

D'après la proposition 7.4, on déduit le développement en fraction continuée (de la série ordinaire) :

$$(9.7) \quad \sum_{n \geq 0} GM_{2n+1} t^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{1^2 t^2}{1 - \frac{1^2 t^2}{1 - \frac{2^2 t^2}{1 - \frac{2^2 t^2}{\dots}}}}}$$

Un problème est de calculer la série génératrice exponentielle de ces nombres.

Une constatation expérimentale est que la valuation 2-adique de  $GM_{2n+1}$  est  $n$  (resp.  $n-1$ ) lorsque  $n$  est impair (resp. pair). Le problème est de démontrer cette divisibilité par 2 à partir des interprétations combinatoires.

Problème 5. - Interprétation combinatoire des nombres de Genocchi à partir du déterminant binomial (6.7).

Il s'agit de relier l'interprétation donnée au corollaire 6.5 aux deux autres (génération de Gandhi et de-Seidel). Il faudrait déjà expliquer la divisibilité par  $2^n \cdot n!$  du nombre de couples  $(f, g)$  du corollaire 6.5.

Problème 6. - Conjecture : Le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est le nombre de permutations de Jacobi (définition 3.7)  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}$  vérifiant la condition suivante

$$(9.8) \quad \sigma(i) \text{ est pair si et seulement si } i \in [2n+1] \text{ est pair.}$$

On peut même conjecturer que la distribution de ces permutations selon la dernière lettre est le "pistolet de Genocchi"  $(h_{n,m})$  défini en (4.11).

Une autre question est d'étudier la distribution de ces permutations selon le paramètre de la proposition 8.1, c'est-à-dire de savoir si l'on a pour les nombres de Genocchi l'analogie des fonctions elliptiques de Jacobi (dans le cas où la conjecture est vraie !).

Problème 7. - Interpréter combinatoirement la relation de récurrence

$$(9.9) \quad 2(2n-1) G_{2n} = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \binom{2n}{2k} G_{2k} G_{2n-2k} .$$

Problème 8. - Interpréter combinatoirement la relation

$$G_{2n} = 2n \sum_{1 \leq k \leq 2n-1} (-1)^k k! \frac{S(2n-1, k)}{2^k}$$

avec  $S(n, k)$  le nombre de Stirling de première espèce, c'est-à-dire le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  parties (ou blocs).

Problème 9. - Les  $V(n, k)$  de Howard.

En [74] Howard a introduit les nombres  $V(n, k)$  par la relation

$$(9.10) \quad k! \sum_{n=0}^{\infty} V(n, k) \frac{x^n}{n!} = [x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)]^k .$$

Il démontre la relation suivante, liant ces nombres aux nombres de Genocchi :

$$(9.11) \quad G_n = \sum_{j=0}^{n-1} j! 4^{-j} (nV(n-1, j) - \binom{n}{2} V(n-2, j)) .$$

Appelons 3-partitions pointées de  $[n]$  une partition de  $[n]$  dont chaque bloc a au moins trois éléments et dont un élément "intérieur" (c'est-à-dire distinct du plus petit et du plus grand) de chaque bloc est distingué.

D'après la théorie du composé partitionnel de Foata [28], il est clair que  $V(n, k)$  est le nombre de 3-partitions pointées de  $[n]$ .

Nous dirons qu'une partition est ordonnée lorsque l'ensemble des blocs l'est. Une 3-partition est dite colorée lorsque les éléments intérieurs de chaque bloc sont colorés en deux couleurs. Soit  $R_n$  le nombre de 3-partitions pointées, ordonnées et colorées de  $[n]$ . Par quelques manipulations élémentaires, la relation (9.11) est équivalente aux relations suivantes

$$(9.12) \quad \begin{cases} R_{2n} - 2n R_{2n-1} = 0 & (n \geq 1) , \\ R_{2n+1} - (2n+1) R_{2n} = (-1)^{n+1} E_{2n+1} & (n \geq 0) . \end{cases}$$

Le problème est d'interpréter combinatoirement ces relations.

Problème 10. - Une classe de permutations dénombrées par les nombres d'Euler.

Kreweras [43] et Gessel et Wang [73] ont introduit des polynômes  $K_m(t)$  dénombrant les "paires d'inversions" dans certains arbres à  $m$  sommets. Ces polynômes sont reliés aux nombres d'Euler par l'identité

$$(9.13) \quad E_m = K_m(-1) .$$

Pansiot [53] en a donné une preuve bijective en utilisant l'interprétation des nombres d'Euler donnée dans la proposition 3.12. En utilisant l'interprétation des polynômes  $K_m(t)$  donnée par Kreweras [43] en termes de réarrangement de fonctions sous-excédantes croissantes, on peut envisager une autre preuve bijective de (9.13). Le nombre  $K_m(-1)$  est le nombre de permutations  $\sigma$  construites par la règle suivante.

Toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+1}$  s'obtient à partir d'une permutation  $\tau = x_1 \dots x_m$  de  $\mathfrak{S}_m$  en "insérant" la lettre  $m+1$  dans l'une des "positions" libres, c'est-à-dire à gauche de  $x_i$ , ou à droite de  $x_m$ , ou entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  pour  $1 \leq i < m$ . Supposons défini un ensemble  $\mathcal{K}_m \subset \mathfrak{S}_m$  de permutations, les  $(m+1)$  positions libres de chaque permutation étant colorées en deux couleurs appelée "permise" et "interdite". On définit alors  $\mathcal{K}_{m+1} \subset \mathfrak{S}_{m+1}$  comme l'ensemble des permutations  $\sigma$  obtenues en insérant  $m+1$  sur une position permise  $(x_i, x_{i+1})$  d'une permutation  $\tau$  de  $\mathcal{K}_m$  (on convient pour les deux cas extrêmes de prendre  $x_0 = x_{m+1} = 0$ ).

On convient alors que les nouvelles positions  $(x_i, m+1)$  et  $(m+1, x_{i+1})$  sont permises (pour  $\sigma$ ), que toute position à gauche de  $x_i$  devient permise et que toute position à droite de  $x_{i+1}$  qui était permise (resp. interdite) pour  $\tau$  devient interdite (resp. permise) pour  $\sigma$ .

En partant de  $\mathcal{K}_1 = \mathfrak{S}_1$ , unique permutation  $\sigma = 1$  avec ses deux positions considérées comme permises, on construit par récurrence une classe  $\mathcal{K}_m$  de permutations dénombrées par  $K_m(-1)$  (voir table 2). Le problème est de trouver une bijection avec l'une des interprétations connues des nombres d'Euler.



$\chi_1$	$\chi_2$	$\chi_3$
1	21	321
	12	231
		312
		132
		123

Table 2

Les permutations de  $\chi_m$ ,  $m = 1, 2, 3$

-:-:-:-

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ANDRÉ, Développement en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances, Ann. Ecole Norm. Sup., (2) 6 (1877), 265-328.
- [2] D. ANDRÉ, Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable, J. Math. Pures Appl. (3) 5 (1879), 31-46.
- [3] D. ANDRÉ, Développements de sec x et de tang x, C.R. Acad. Sci. Paris 88 (1879), 965-967.
- [4] D. ANDRÉ, Sur les permutations alternées, J. Math. Pures Appl. 7 (1881), 167-184.
- [5] T. J. BUCKHOLTZ et D. E. KNUTH, Computation of tangent, Euler and Bernoulli number, Math. Comp. 21 (1967), 663-688.
- [6] W. H. BURGE, An analysis of a tree sorting method and some properties of a set of trees, in "First USA-Japan Computer Conf." (1972), 372-379.
- [7] L. CARLITZ, A conjecture concerning Genocchi numbers, K. Norske Vidensk. Selsk. Sk. 9 (1972) 1-4.
- [8] L. CARLITZ, Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomial, Discrete Maths. 30 (1980), 211-225.

- [9] L. COMTET, "Advanced Combinatorics", Reidel, Dordrecht-Boston (1974).
- [10] R. DONAGHEY, Alternating permutations and binary increasing trees, J. Comb. Th. (A) 18 (1975), 141-148.
- [11] S. DULUCQ, Sur une famille de déterminants dénombrés par les nombres de Catalan, (1981), soumis à publication.
- [12] D. DUMONT, Sur une conjecture de Gandhi concernant les nombres de Genocchi, Discrete Maths., 1 (1972), 321-327.
- [13] D. DUMONT, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, Duke Math. J. 41 (1974), 305-318.
- [14] D. DUMONT, Une nouvelle interprétation combinatoire des nombres tangents, 5. th Hungarian Conference on Combinatorics, Keszthely, (1976).
- [15] D. DUMONT et D. FOATA, Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, Bull. Soc. Math. France, 104 (1976), 433-451.
- [16] D. DUMONT, A combinatorial interpretation for the Schett recurrence on the Jacobian elliptic functions, Math. Comp. 33 (1979), 1293-1297.
- [17] D. DUMONT et G. VIENNOT, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, Annals of Discrete Maths. 6 (1980), 77-87.
- [18] D. DUMONT, Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi, Advances in Maths. 41 (1981), 1-39.
- [19] D. DUMONT, Arbres, forêts et fonctions elliptiques, à paraître.
- [20] R. C. ENTRINGER, A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, Nieuw. Arch. Wisk. 14 (1966), 241-246.
- [21] P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions, Discrete Math. 32 (1980), 125-161.
- [22] P. FLAJOLET et J. FRANÇON, Permutations bégayantes, en préparation.
- [23] P. FLAJOLET, J. FRANÇON, J. VUILLEMIN, Sequence of operations analysis for dynamic data structures, J. of Algorithms, 1 (1980), 111-141.
- [24] M. FLIESS, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France, à paraître.

- [25] M. FLIESS, A note on Volterra series expansions for nonlinear differential systems, IEEE Trans. Automat. Control, à paraître.
- [26] D. FOATA et M. P. SCHÜTZENBERGER, Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math. n° 138, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [27] D. FOATA et M. P. SCHÜTZENBERGER, Nombres d'Euler et permutations alternantes, manuscrit, University of Florida, Gainesville (1971). Première partie publiée dans : "A Survey of Combinatorial Theory", J. N. Srivastava et als. eds., North-Holland (1973), 173-187.
- [28] D. FOATA, "La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération", Séminaire de Math. Sup., Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal (1974).
- [29] D. FOATA and V. STREHL, Rearrangements of the symmetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers, Math. Z., 137 (1974), 257-264.
- [30] D. FOATA, Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe de permutations, in "Higher Combinatorics", M. Aigner éd., Reidel, Dordrecht (1977).
- [31] J. FRANÇON, Arbres binaires de recherche : propriétés combinatoires et applications, R.A.I.R.O. Informatique Théorique 10 (1976), 35-50.
- [32] J. FRANÇON, Histoires de Fichiers, R.A.I.R.O. Informatique Théorique 12 (1978), 49-62.
- [33] J. FRANÇON et G. VIENNOT, Permutations selon les pics, creux, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, Discrete Math. 28 (1979), 21-35.
- [34] J. M. GANDHI, A conjectured representation of Genocchi numbers, Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 505-506.
- [35] I. GESSEL and G. VIENNOT, Combinatorial interpretation of determinants with weighted paths, preprint (1981).
- [36] I. GESSEL and G. VIENNOT, Binomial determinants, paths and hook length formula, preprint (1981).
- [37] I. GESSEL and G. VIENNOT, Determinants, paths, Young tableaux and plane partitions, preprint (1981).
- [38] I. GESSEL and G. VIENNOT, Generalized tangent and Genocchi numbers, manuscript (1979).

- [39] C. GUDERMAN, Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale, J. de Crelle, 19 (1840), 45-83.
- [40] D. M. JACKSON, Some results on "Product-weighted lead codes", J. Comb. Th. (A) 25 (1978), 181-187.
- [41] D. KNUTH, The Art of Computer Programming : Fundamental algorithm (vol. 1), Addison Wesley, Reading (1968/1973).
- [42] D. KNUTH, The Art of Computer Programming : Sorting and searching (vol. 3), Addison Wesley, Reading (1973).
- [43] G. KREWERAS, in "Comptes Rendus du Séminaire International IRIA Sophia-Antipolis, Combinatoire et Algorithmique" (1979), IRIA, Rocquencourt.
- [44] G. KREWERAS, Communication personnelle.
- [45] S. KUNDU, Sorting tree, nestling tree and inverse permutation, Information Processing Letters, 6 (1977) 94-96.
- [46] F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, Application des variables non commutatives à des calculs formels en statistique non linéaire, thèse 3e cycle, Labo. des signaux et systèmes (1980).
- [47] A. LASCOUX, Classes de Chern d'un produit tensoriel, C.R. Acad. Sci. Paris 286 (1978), 385-387.
- [48] P. A. Mac MAHON, "Combinatorial Analysis", Cambridge Univ. Press (1915/1916); réimpression Chelsea, New-York (1960).
- [49] S. C. MITRA, On the expansion of the Weierstrassian and Jacobian elliptic functions in powers of the argument, Bull. Calcutta Math. Soc. 17 (1926), 159-172.
- [50] MUIR, A treatise on the theory of determinants, Dover (1960).
- [51] N. NIELSEN, "Traité élémentaire des nombres de Bernoulli", Gauthiers-Villars, Paris (1923).
- [52] I. NIVEN, A combinatorial problem of finite sequences, Nieuw Archief voor Wiskunde 16 (1968), 116-123.
- [53] PANSIOT, Euler numbers and inversions of trees, à paraître European J. of Comb.
- [54] F. POUSSIN, Polynômes et nombres d'Euler, Thèse 3e cycle, Paris (1970).
- [55] J. RIORDAN, "Combinatorial identities", John Wiley, New-York (1968).

- [56] J. RIORDAN and P. R. STEIN, Proof of a conjecture on Genocchi numbers, Discrete Maths, 5 (1973), 381-388.
- [57] J. ROSEN, The number of product-weighted lead codes for ballots and its relation to the Ursell function of the linear Ising model, J. Comb. Th. (A) 20 (1976), 377-384.
- [58] A. SCHETT, Properties of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobi elliptic functions, Math. Comp. 30 (1976), 143-147.
- [59] A. SCHETT, Recurrence formulat of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions, Math. Comp. 31 (1977), 1003-1005.
- [60] M. P. SCHÜTZENBERGER, Solution non commutative d'une équation différentielle classique, in "New concepts and technologies in parallel information processings", Ed. Caianiello, Nato Advanced Studies Institute Series, Serie E : Applied Science, vol. 9, Noordhoff, Leyden (1975), 381-401.
- [61] L. SEIDEL, Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, Sitzungsberichte der Münchener Akademie, Math. Phys. Klasse (1877), 157-187.
- [62] N. J. A. SLOANE, "A handbook of integer sequences", Academic Press, New-York (1973).
- [63] V. STREHL, Enumeration of alternating permutations according to peak sets, J. Comb. Th. (A) 24 (1978), 238-240.
- [64] V. STREHL, Alternating permutations and modified Ghandi-polynomials, Discrete Maths, 28 (1979), 89-100.
- [65] W. T. TUTTE, A contribution to the theory of chromatic polynomials, Canad. J. Math. 6 (1954), 80-91.
- [66] G. VIENNOT, Quelques algorithmes de permutations, in "Journées algorithmiques", Astérisque 38/39, S.M.F. Paris (1976), 275-293.
- [67] G. VIENNOT, Une interprétation combinatoire des coefficients des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi, J. Comb. Th. (A) 29 (1980), 121-133.
- [68] G. VIENNOT, Finite difference calculus and permutations having a given set of rises, à paraître, Discrete Maths:
- [69] G. VIENNOT, Maximal chains of sub words and up-down sequences of permutations, à paraître, J. Comb. Th. (A)
- [70] G. VIENNOT, Combinatorial theory of orthogonal polynomial, en préparation.

- [71] G. VIENNOT, Combinatoire des histoires et résolution d'équations différentielles en automatique non linéaire, en préparation.
- [72] G. VIENNOT, "Bijjective combinatorics", Combinatorics Seminar Notes, La Jolla, California (Spring, 1981).
- [73] I. GESSEL, D. L. WANG, Depth-First search as a combinatorial correspondence, J. of Comb. Th.
- [74] C. POUPARD, De nouvelles significations énumératives des nombres d'Entringer, à paraître, Discrete Maths (1982).

(texte reçu le 23 octobre 1981)

---:---

Gérard VIENNOT  
U.E.R. de Mathématiques  
et d'Informatique de  
l'Université de Bordeaux I  
F 33405 TALENCE CEDEX