

Algèbre de Loday-Ronco et tableaux alternatifs de Catalan

J.-C. Aval, X. Viennot

GT - LaBRI - 23/01/09

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{*} \mathcal{H}$ linéaire :

$$\begin{aligned}u * (v + w) &= *(u \otimes (v + w)) \\ &= *(u \otimes v + u \otimes w) \\ &= u * v + u * w\end{aligned}$$

$$\mathbf{1} * u = u * \mathbf{1} = u$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère

$\mathcal{H} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ morphisme d'algèbre :

$$\Delta(k \cdot u) = k \Delta(u)$$

$$\Delta(u + v) = \Delta(u) + \Delta(v)$$

$$\Delta(u * v) = \Delta(u) (* \otimes *) \Delta(v)$$

$$\Delta(\mathbf{1}) = \Delta(\mathbf{1}) \otimes \Delta(\mathbf{1})$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère

Il existe $\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Q}$ tel que $* \circ (\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id$, ie

si $\Delta(w) = \sum v_1 \otimes v_2$ alors $\sum \varepsilon(v_1) * v_2 = w$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère
- \mathcal{H} possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta, S)$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifiée
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère
- \mathcal{H} possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta, S)$

Il existe $\mathcal{H} \xrightarrow{S} \mathcal{H}$ tel que

$$* \circ (S \otimes Id) \circ \Delta = * \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifiée
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère
- \mathcal{H} possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta, S)$
- \mathcal{H} est graduée : $\mathcal{H} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- \mathcal{H} est un \mathbb{Q} -ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- \mathcal{H} est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifiée
- \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta)$ coassociative, counifère
- \mathcal{H} possède un antipode $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \Delta, S)$
- \mathcal{H} est graduée : $\mathcal{H} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$

- $\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l \xrightarrow{*} \mathcal{H}_{k+l}$

- $\mathcal{H}_n \xrightarrow{\Delta} \sum_{k+l=n} \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l$

- $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! \end{array}$$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$$\text{Std}(4731) = 3421$$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$\text{Std}(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$\text{Std}(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$$\text{Std}(4731) = 3421$$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$

- $\sigma \in S_n, \Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^n \sigma|_{\{1,\dots,i\}} \otimes \text{Std}(\sigma|_{\{i+1,\dots,n\}})$
 $623154|_{\{125\}} = 215$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :

$$\text{Std}(4731) = 3421$$

- $\sigma \in S_k, \alpha \in S_l, k + l = n ; \sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\dots,n\} \\ \text{Std}(u)=\sigma, \text{Std}(v)=\alpha}} uv$

Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$

- $\sigma \in S_n, \Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^n \sigma|_{\{1,\dots,i\}} \otimes \text{Std}(\sigma|_{\{i+1,\dots,n\}})$
 $623154|_{\{125\}} = 215$

Exemple : $\Delta(3124)$

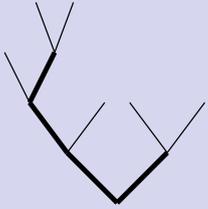
$$= \mathbf{1} \otimes 3124 + \mathbf{1} \otimes \text{Std}(324) + 12 \otimes \text{Std}(34) + 312 \otimes \text{Std}(4) + 3124 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes 3124 + \mathbf{1} \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes \mathbf{1} + 3124 \otimes \mathbf{1}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! \end{array}$$

Algèbre des arbres binaires plans

[Loday-Ronco]

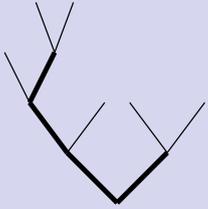


Y_n : ensemble des arbres binaires plans

$$Y = \mathbb{Q}[\sqcup Y_n]$$

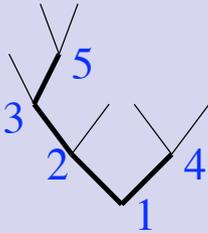
Algèbre des arbres binaires plans

[Loday-Ronco]



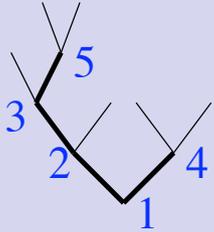
Y_n : ensemble des arbres binaires plans

$$Y = \mathbb{Q}[\sqcup Y_n]$$



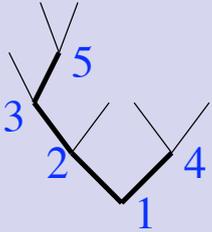
Y_n^+ : ensemble des arbres binaires plans
croissants

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 35214 bijection entre Y_n^+ et S_n

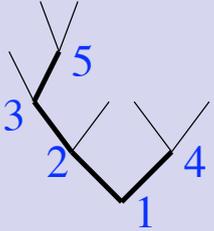
Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 35214 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Algèbre des arbres binaires plans



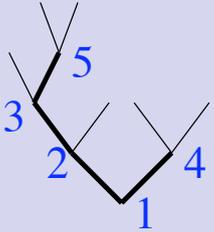
\longleftrightarrow 35214 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 35214 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

- $T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

$$\vee * \bullet =$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

$$\swarrow * \bullet = (213 + 312) * (1)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$$

$$\swarrow * \bullet = (213 + 312) * (1)$$

$$= (3241 + 3142 + 2143 + 2134) + (4231 + 4132 + 4123 + 3124)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

$$\sphericalangle * \bullet = (213 + 312) * (1)$$

$$= (3241 + 3142 + 2143 + 2134) + (4231 + 4132 + 4123 + 3124)$$

$$= \begin{array}{cccccccc} \begin{array}{c} 3 \diagup \\ 2 \diagdown \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \diagup \\ 3 \diagdown \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \diagup \\ 2 \diagdown \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \diagup \\ 2 \diagdown \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \diagup \\ 2 \diagdown \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \diagup \\ 4 \diagdown \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \diagup \\ 4 \diagdown \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \diagup \\ 4 \diagdown \\ 2 \end{array} \\ + & + & + & + & + & + & + & + \\ \end{array}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

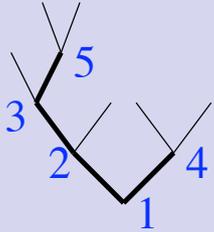
$$\begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} * \bullet = (213 + 312) * (1)$$

$$= (3241 + 3142 + 2143 + 2134) + (4231 + 4132 + 4123 + 3124)$$

$$= \begin{array}{cccccccc} \begin{array}{l} 3 \\ \diagdown \\ 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} & + & \begin{array}{l} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ \diagup \\ 2 \end{array} & + & \begin{array}{l} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ \diagup \\ 3 \end{array} & + & \begin{array}{l} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ \diagup \\ 3 \end{array} & + & \begin{array}{l} 4 \\ \diagdown \\ 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} & + & \begin{array}{l} 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} & + & \begin{array}{l} 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 3 \\ \diagup \\ 2 \end{array} & + & \begin{array}{l} 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ \diagup \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array}$$

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 35214 bijection entre Y_n^+ et S_n

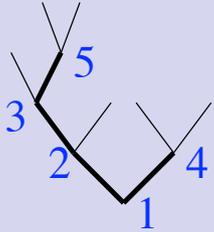
Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

- $T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$

Algèbre des arbres binaires plans



\longleftrightarrow 35214 bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\bar{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \in S$$

- $T * T' = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\Psi}(T) * \bar{\Psi}(T'))$
- $\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$



Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(213 + 312)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(213 + 312) = \Delta(213) + \Delta(312)$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\bar{\Psi} \otimes \bar{\Psi})^{-1} \Delta(\bar{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(213 + 312) = \Delta(213) + \Delta(312)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 213 + 1 \otimes 12 + 21 \otimes 1 + 213 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 312 + 1 \otimes 21 + 12 \otimes 1 + 312 \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \Delta(\overline{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(213 + 312) = \Delta(213) + \Delta(312)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 213 + \mathbf{1} \otimes 12 + 21 \otimes \mathbf{1} + 213 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 312 + \mathbf{1} \otimes 21 + 12 \otimes \mathbf{1} + 312 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \Delta(\overline{\Psi}(T))$$

$$\Delta \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \Delta(213 + 312) = \Delta(213) + \Delta(312)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 213 + \mathbf{1} \otimes 12 + 21 \otimes \mathbf{1} + 213 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 312 + \mathbf{1} \otimes 21 + 12 \otimes \mathbf{1} + 312 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \diagdown \\ 1 \\ 3 \diagup \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ 1 \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \diagdown \\ 1 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 2 \diagdown \\ 1 \\ 3 \diagup \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 3 \diagdown \\ 1 \\ 2 \diagup \end{array} + \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} 2 \diagdown \\ 1 \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ 1 \\ 2 \end{array} \otimes \mathbf{1} + \begin{array}{c} 3 \diagdown \\ 1 \\ 2 \diagup \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \mathbf{.} \otimes \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \mathbf{.} \otimes \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \otimes \mathbf{.} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \mathbf{.} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \otimes \mathbf{1}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! \end{array}$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

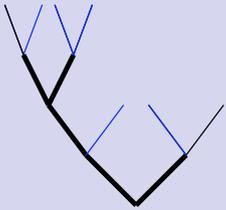
$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$

$\longrightarrow \quad (-1, +1, -1, -1, +1)$

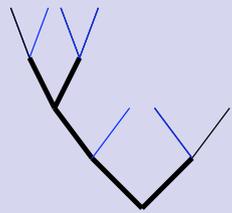


$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$



$$\longrightarrow (-1, +1, -1, -1, +1)$$

$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

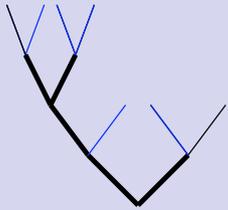
Pour $H \in Q_n$, on définit $\bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$

$$\longrightarrow (-1, +1, -1, -1, +1)$$



$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

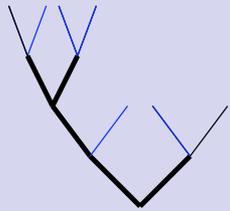
Pour $H \in Q_n$, on définit $\bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

$$\bar{\Psi} \circ \bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Phi \circ \Psi(\sigma)=H}} \sigma = \sum_{Des(\sigma)=H} \sigma$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$$

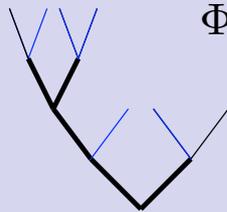


$$\longrightarrow (-1, +1, -1, -1, +1)$$

$$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n \text{ surjection}$$

Pour $H \in Q_n$, on définit $\bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

$$\bar{\Psi} \circ \bar{\Phi}(H) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Phi \circ \Psi(\sigma)=H}} \sigma = \sum_{Des(\sigma)=H} \sigma$$



$$635214 \longrightarrow \text{Diagram} \longrightarrow (-1, +1, -1, -1, +1)$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leq & C_n & \leq & n! \end{array}$$