Algèbre de Loday-Ronco et tableaux alternatifs de Catalan

J.-C. Aval, X. Viennot

GT - LaBRI - 23/01/09

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère

  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{*} \mathcal{H}$ linéaire :

$$\begin{aligned} u * (v + w) &= *(u \otimes (v + w)) \\ &= *(u \otimes v + u \otimes w) \\ &= u * v + u * w \end{aligned}$$

$$\mathbf{1} * u = u * \mathbf{1} = u$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère

  $\mathcal{H} \xrightarrow{\triangle} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ morphisme d'algèbre :

$$\begin{array}{rcl} \triangle(k \cdot u) & = & k \triangle (u) \\ \triangle(u+v) & = & \triangle(u) + \triangle(v) \\ \triangle(u * v) & = & \triangle(u)(* \otimes *) \triangle (v) \\ \triangle(\mathbf{1}) & = & \triangle(\mathbf{1}) \otimes \triangle(\mathbf{1}) \end{array}$$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère

  Il existe $\mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}$ tel que $* \circ (\varepsilon \otimes Id) \circ \triangle = Id$, ie

  si $\triangle(w) = \sum v_1 \otimes v_2$ alors $\sum \varepsilon(v1) * v_2 = w$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère
- $\mathcal{H}$ possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle, S)$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère
- $\mathcal{H}$ possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle, S)$

  Il existe $\mathcal{H} \xrightarrow{S} \mathcal{H}$ tel que
  $* \circ (S \otimes Id) \circ \triangle = * \circ (Id \otimes S) \circ \triangle = \eta \circ \varepsilon$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère
- $\mathcal{H}$ possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle, S)$
- $\mathcal{H}$ est graduée : $\mathcal{H} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$

Définition : algèbre de Hopf graduée

- $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{Q}$-ev $(\mathcal{H}, +, \cdot)$
- $\mathcal{H}$ est une algèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *)$ associative, unifère
- $\mathcal{H}$ est une bigèbre $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle)$ coassociative, counifère
- $\mathcal{H}$ possède un antipode : $(\mathcal{H}, +, \cdot, *, \triangle, S)$
- $\mathcal{H}$ est graduée : $\mathcal{H} = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$
  - $\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l \xrightarrow{*} \mathcal{H}_{k+l}$
  - $\mathcal{H}_n \xrightarrow{\triangle} \sum_{k+l=n} \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_l$
  - $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Q}$

$$
\begin{array}{ccccc}
Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\
2^{n-1} & \leqslant & C_n & \leqslant & n!
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leqslant & C_n & \leqslant & n! \end{array}$$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]

S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]
S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :
Std$(4731) = 3421$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]
S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :
Std$(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k$, $\alpha \in S_l$, $k + l = n$; $\sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\ldots,n\} \\ Std(u)=\sigma, Std(v)=\alpha}} uv$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]
S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :
Std$(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k$, $\alpha \in S_l$, $k + l = n$; $\sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\ldots,n\} \\ Std(u)=\sigma, Std(v)=\alpha}} uv$

  Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]
S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :
Std$(4731) = 3421$

- $\sigma \in S_k$, $\alpha \in S_l$, $k + l = n$; $\sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\ldots,n\} \\ Std(u)=\sigma, Std(v)=\alpha}} uv$
  Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$
- $\sigma \in S_n$, $\triangle(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_{|\{1,\ldots,i\}} \otimes \mathrm{Std}(\sigma_{|\{i+1,\ldots,n\}})$
  $623154_{|\{125\}} = 215$

Algèbre du groupe symétrique

[Malvenuto-Reutenauer]
S_n : groupe symétrique ; $S = \mathbb{Q}[\sqcup S_n]$

Permutation associée à un mot sans répétition :
Std$(4731) = 3421$

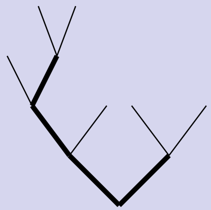
- $\sigma \in S_k$, $\alpha \in S_l$, $k + l = n$; $\sigma * \alpha = \sum_{\substack{u,v=\{1,\ldots,n\} \\ Std(u)=\sigma, Std(v)=\alpha}} uv$
  Exemple : $12 * 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421$
- $\sigma \in S_n$, $\triangle(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_{|\{1,\ldots,i\}} \otimes \mathrm{Std}(\sigma_{|\{i+1,\ldots,n\}})$
  $623154_{|\{125\}} = 215$

  Exemple : $\triangle(3124)$
  $= \mathbf{1} \otimes 3124 + 1 \otimes \mathrm{Std}(324) + 12 \otimes \mathrm{Std}(34) + 312 \otimes \mathrm{Std}(4) + 3124 \otimes \mathbf{1}$
  $= \mathbf{1} \otimes 3124 + 1 \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes 1 + 3124 \otimes \mathbf{1}$

$$
\begin{array}{ccccc}
Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\
2^{n-1} & \leqslant & C_n & \leqslant & n!
\end{array}
$$

Algèbre des arbres binaires plans

[Loday-Ronco]

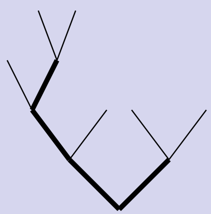


Y_n : ensemble des arbres binaires plans

$Y = \mathbb{Q}[\sqcup Y_n]$

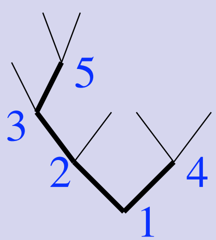
Algèbre des arbres binaires plans

[Loday-Ronco]



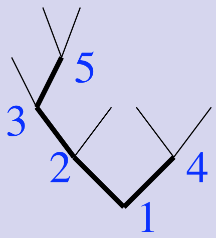
Y_n : ensemble des arbres binaires plans

$$Y = \mathbb{Q}[\sqcup Y_n]$$



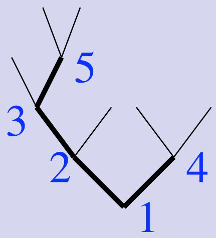
Y_n^+ : ensemble des arbres binaires plans croissants

Algèbre des arbres binaires plans



$\longleftrightarrow \quad 35214$ bijection entre Y_n^+ et S_n

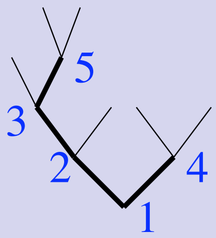
Algèbre des arbres binaires plans



$\longleftrightarrow \quad 35214$ bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Algèbre des arbres binaires plans



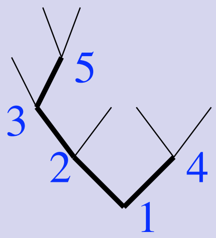
$\longleftrightarrow$ $\quad 35214$ bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\overline{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \qquad \in S$$

Algèbre des arbres binaires plans



$\longleftrightarrow \quad 35214$ bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\overline{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma)=T}} \sigma \qquad \in S$$

- $T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

 $* \ \blacksquare =$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

 $* \,{\scriptstyle\blacksquare} = \; (213 + 312) * (1)$

Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

 $* \blacksquare = \ (213 + 312) * (1)$

$$= \ (3241 + 3142 + 2143 + 2134) + (4231 + 4132 + 4123 + 3124)$$

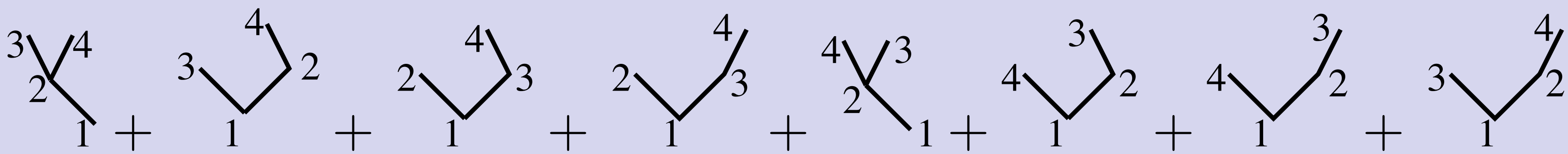
Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

 $* \ \blacksquare = \ (213 + 312) * (1)$

$$= \ (3241 + 3142 + 2143 + 2134) + (4231 + 4132 + 4123 + 3124)$$

$=$

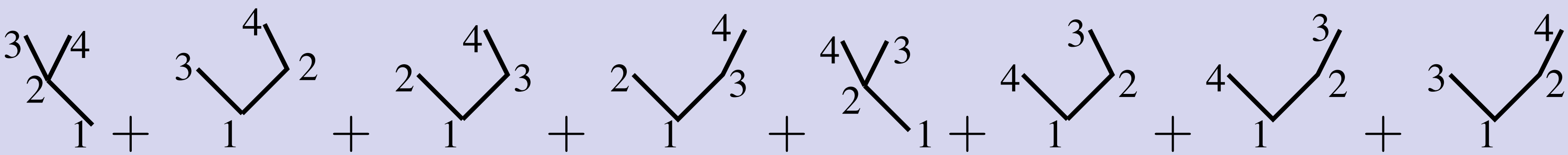


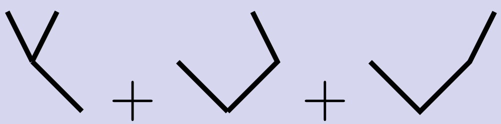
Algèbre des arbres binaires plans

$$T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$$

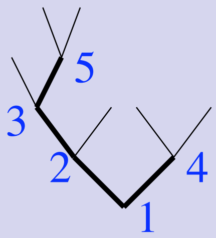
 $* \, \blacksquare = \ (213 + 312) * (1)$

$$= \ (3241 + 3142 + 2143 + 2134) + (4231 + 4132 + 4123 + 3124)$$

$=$ 

$=$ 

Algèbre des arbres binaires plans



$\longleftrightarrow \quad 35214$ bijection entre Y_n^+ et S_n

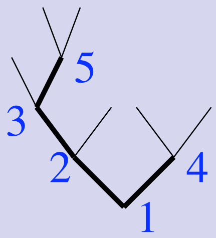
Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\overline{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma)=T}} \sigma \ \in S$$

- $T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$

Algèbre des arbres binaires plans



$\longleftrightarrow \quad 35214$ bijection entre Y_n^+ et S_n

Surjection $S_n \xrightarrow{\Psi} Y_n$ en oubliant les étiquettes

Pour $T \in Y_n$, on définit

$$\overline{\Psi}(T) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Psi(\sigma) = T}} \sigma \ \in S$$

- $T * T' = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\Psi}(T) * \overline{\Psi}(T'))$
- $\triangle(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \triangle \left(\overline{\Psi}(T)\right)$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\triangle(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \triangle\,(\overline{\Psi}(T))$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\triangle(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \triangle\, (\overline{\Psi}(T))$$

$\triangle$ 

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1}\, \Delta\, (\overline{\Psi}(T))$$

Δ  $= \Delta(213 + 312)$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\triangle(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \triangle (\overline{\Psi}(T))$$

$\triangle$  $= \triangle(213 + 312) \; = \triangle(213) + \triangle(312)$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\Delta(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \,\Delta\, (\overline{\Psi}(T))$$

Δ  $= \Delta(213 + 312) \; = \Delta(213) + \Delta(312)$

$$= \mathbf{1} \otimes 213 + 1 \otimes 12 + 21 \otimes 1 + 213 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \; \mathbf{1} \otimes 312 + 1 \otimes 21 + 12 \otimes 1 + 312 \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\triangle(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \triangle (\overline{\Psi}(T))$$

$$\triangle \diagdown\!\diagup \;= \triangle(213 + 312) \;= \triangle(213) + \triangle(312)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 213 + 1 \otimes 12 + 21 \otimes 1 + 213 \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes 312 + 1 \otimes 21 + 12 \otimes 1 + 312 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes {}^{2}\diagdown_{1}\diagup^{3} + 1. \otimes \diagup_{1}^{2} + {}^{2}\diagdown_{1} \otimes 1. + {}^{2}\diagdown_{1}\diagup^{3} \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \mathbf{1} \otimes {}^{3}\diagdown_{1}\diagup^{2} + 1. \otimes {}^{2}\diagdown_{1} + \diagup_{1}^{2} \otimes 1. + {}^{3}\diagdown_{1}\diagup^{2} \otimes \mathbf{1}$$

Algèbre des arbres binaires plans

$$\triangle(T) = (\overline{\Psi} \otimes \overline{\Psi})^{-1} \triangle\,(\overline{\Psi}(T))$$

$$\triangle \vee \;= \triangle(213 + 312) \;= \triangle(213) + \triangle(312)$$

$$= \mathbf{1} \otimes 213 + 1 \otimes 12 + 21 \otimes 1 + 213 \otimes \mathbf{1}$$

$$+\; \mathbf{1} \otimes 312 + 1 \otimes 21 + 12 \otimes 1 + 312 \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes {}^{2}\underset{1}{\vee}{}^{3} + 1. \otimes \underset{1}{/}{}^{2} + {}^{2}\underset{1}{\backslash} \otimes 1. + {}^{2}\underset{1}{\vee}{}^{3} \otimes \mathbf{1}$$

$$+\; \mathbf{1} \otimes {}^{3}\underset{1}{\vee}{}^{2} + 1. \otimes {}^{2}\underset{1}{\backslash} + \underset{1}{/}{}^{2} \otimes 1. + {}^{3}\underset{1}{\vee}{}^{2} \otimes \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{1} \otimes \vee + \centerdot \otimes / + \centerdot \otimes \backslash + \backslash \otimes \centerdot + / \otimes \centerdot + \vee \otimes \mathbf{1}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\ 2^{n-1} & \leqslant & C_n & \leqslant & n! \end{array}$$

Algèbre des descentes

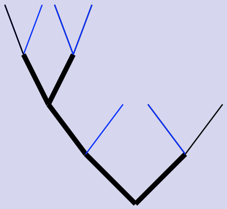
[Solomon]

$Q_n = \{-1, +1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$Q_n = \{-1,+1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$

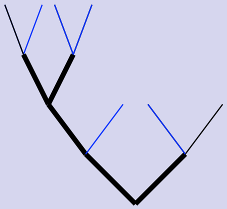
 $\longrightarrow \quad (-1,+1,-1,-1,+1)$

$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n$ surjection

Algèbre des descentes

[Solomon]

$Q_n = \{-1,+1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$

 $\longrightarrow \quad (-1,+1,-1,-1,+1)$

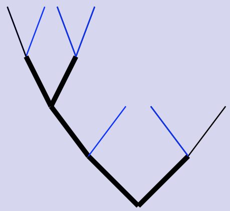
$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n$ surjection

Pour $H \in Q_n$, on définit $\overline{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$Q_n = \{-1,+1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$

 $\longrightarrow \quad (-1,+1,-1,-1,+1)$

$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n$ surjection

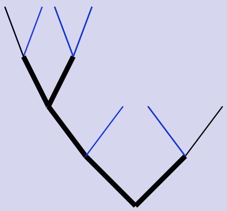
Pour $H \in Q_n$, on définit $\overline{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \ \in Y$

$$\overline{\Psi} \circ \overline{\Phi}(H) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Phi\circ\Psi(\sigma)=H}} \sigma = \sum_{Des(\sigma)=H} \sigma$$

Algèbre des descentes

[Solomon]

$Q_n = \{-1,+1\}^{n-1} \quad Q = \mathbb{Q}[\sqcup Q_n]$



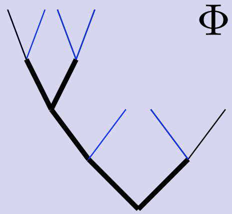
$\longrightarrow \quad (-1,+1,-1,-1,+1)$

$Y_n \xrightarrow{\Phi} Q_n$ surjection

Pour $H \in Q_n$, on définit $\overline{\Phi}(H) = \sum_{\substack{T \in Y_n \\ \Phi(T)=H}} T \in Y$

$$\overline{\Psi} \circ \overline{\Phi}(H) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \Phi\circ\Psi(\sigma)=H}} \sigma = \sum_{Des(\sigma)=H} \sigma$$

$635214 \quad \longrightarrow$



$\longrightarrow \quad (-1,+1,-1,-1,+1)$

$$
\begin{array}{ccccc}
Q & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & S \\
2^{n-1} & \leqslant & C_n & \leqslant & n!
\end{array}
$$